16.6.

2.6.

1 Nalezněte řešení rovnice

82

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = 20\cos 2x + 16 x e^{2x}$$

splňující

$$y(0) = -1 \quad y'(0) = -3 \quad y''(0) = -11$$

Řešení

$$\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0 \qquad (\lambda - 1)(\lambda^2 + 4) = 0$$ 1

$$\Rightarrow y_H = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$$ 0,5

$$y_p = Ax\cos 2x + Bx\sin 2x + (Cx + D)e^{2x}$$
$$y_p' = A\cos 2x - 2xA\sin 2x + B\sin 2x + 2Bx\cos 2x + (2Cx + 2D + C)e^{2x}$$
$$y_p'' = -4A\sin 2x - 4xA\cos 2x + 4B\cos 2x - 4Bx\sin 2x + (4Cx + 4D + 2C + 2C)e^{2x}$$
$$y_p''' = -12A\cos 2x + 8xA\sin 2x - 12B\sin 2x - 8Bx\cos 2x + (8Cx + 8D + 8C + 4C)$$ 1,5

$$-12A - 4B + 4A = 20 \Rightarrow -20B = 20 \Rightarrow B = -1$$
$$-12B + 4A + 4B = 0 \Rightarrow A = 2B \qquad A = -2$$ 1

(kontrola: $8A + 4B - 8A - 4B = 0 \ \wedge\ -8B + 4A + 8B - 4A = 0$ ✓)

$$8C - 4C + 8C - 4C = 16 \Rightarrow C = 2$$
$$12C + 8D - 4D - 4C + 4\cdot(2D + C) - 4\cdot D = 0$$
$$8D = -12C$$
$$D = -3$$ 1

$$y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x - 2x\cos 2x - x\sin 2x + (2x - 3)e^{2x}$$
$$C_1 + C_2 - 3 = -1$$
$$y' = C_1 e^x - 2C_2 \sin 2x + 2C_3 \cos 2x - 2\cos 2x + 4x\sin 2x - \sin 2x - 2x\cos 2x + (4x - 6 + 2)e^{2x}$$ 1,5
$$C_1 + 2C_3 - 2 - 4 = -3$$
$$y'' \quad C_1 e^x - 4C_2 \cos 2x - 4C_3 \sin 2x + 4\sin 2x + 4\sin 2x + 8x\cos 2x - 2\cos 2x - 2\cos 2x + 4x\sin 2x + (8x - 8 + 4)e^{2x}$$
$$C_1 - 4C_2 - 8 = -11$$

$$C_1 + C_2 = 2 \qquad \Rightarrow \qquad 5C_2 = 5 \Rightarrow C_2 = 1$$
$$C_1 - 4C_2 = -3 \qquad \Rightarrow C_1 = 1$$ 1
$$\Rightarrow 2C_3 = 2 \Rightarrow C_3 = 1$$

$$y(x) = e^x + \cos 2x + \sin 2x - 2x\cos 2x - x\sin 2x + (2x - 3)e^{2x}$$ 0,5

$x \in \mathbb{R}$

26.

2 V závislosti na parametrech $p \in \mathbb{R}^+$ a $q \in \mathbb{R}$ rozhodněte o konvergenci ~~(absolutní / neabsolutní)~~ řady

75

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{2n^p}\right) \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^q}\right).$$

Řešení

a) $q \geq 0 \quad p > 0$

$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{2n^p}\right) = \frac{(-1)^n}{2n^p} - \frac{1}{8n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)$ 1b

$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^q}\right) = \frac{1}{n^q} - \frac{1}{3n^{3q}} + o\left(\frac{1}{n^{3q}}\right)$ 1b

$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{2n^p}\right) \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^q}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2n^p} - \frac{1}{8n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)\right)\left(\frac{1}{n^q} - \frac{1}{3n^{3q}} + o\left(\frac{1}{n^{3q}}\right)\right)$

$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2n^{p+q}} - \frac{1}{8n^{2p+q}} - \frac{(-1)^n}{3n^{p+3q}} + \frac{1}{6}\frac{1}{n^{2p+3q}} + o()\right)$ 1b

$\Rightarrow$ 1. řádek K pro $p+q > 0$ } ověřeno přes L&C 0,5b

2. řádek K pro $2p+q > 1$

$\Rightarrow$ p musí v tomto případě $\boxed{2p+q > 1}$ 1b

b) $q < 0 \quad p > 0$

$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{2n^p}\right) \operatorname{arctg}(n^{-q}) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2n^p} - \frac{1}{8n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)\right)\operatorname{arctg}(n^{-q})$

$\Rightarrow$ 1. člen Leibniz + Abel ($\operatorname{arctg} n^{-q}$ je monotónní) 1b

$p > 0$ ✓

2. člen ~~Leibniz~~ integrální + srovnání ($\operatorname{arctg}(n^{-q})$ je omezená) 1b

$2p > 1 \Leftrightarrow \boxed{p > \frac{1}{2}}$

~~c) $p=q$ ... $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ ... $\frac{3}{2}$~~

ZÁVĚR

Řada konverguje pro $\boxed{p+q^+ > 0 \wedge 2p+q^+ > 1}$ ($q \in \mathbb{R}$)

9,5b

2.6 8

(3) Nalezněte (pokud ?) lokální extrémy funkce

1b

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + x^2y + xy^2 + \frac{1}{3}y^3 + 2x^2 + y^2$$

ne 1/2. Nalezněte lokální body, ve kterých v těchto extrémy nabývají a rozhodněte o typu lok. extrému.

Řešení

Vše je hladké $\Rightarrow$ stačí řešit $\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \wedge \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ 0,36

$$\left.\begin{aligned} 0 &= x^2 + 2xy + y^2 + 4x \\ 0 &= x^2 + 2xy + y^2 + 2y \end{aligned}\right\} 1b \Rightarrow \begin{aligned} 4x &= 2y \\ y &= 2x \end{aligned} \quad 1b$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x^2 + 4x^2 + 4x = 0$$

$$x(9x+4) = 0$$

$x_1 = 0 \quad y_1 = 0$ 0,85 $[0,0]$

$x_2 = -\frac{4}{9} \quad y_2 = -\frac{8}{9}$ 0,85 $[-\frac{4}{9}, -\frac{8}{9}]$

$$\left.\begin{aligned} f_{xx} &= 2x + 2y + 4 \\ f_{yy} &= 2y + 2x + 2 \\ f_{xy} = f_{yx} &= 2x + 2y \end{aligned}\right\} 1b$$

a) $[0,0]$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{poz. definitní} \Rightarrow \text{lok. minimum} \quad 1b$$

b) $[-\frac{4}{9}, -\frac{8}{9}]$

1b

$$\begin{pmatrix} \frac{12}{9} & -\frac{24}{9} \\ -\frac{24}{9} & -\frac{6}{9} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{indefinitní} \Rightarrow \text{není extrém (sedlový bod)}$$

Funkce nabývá pouze lokálního minima (0) v bodě $[0,0]$.

0,53

(26)

(4) Ověřte, že podmínky

$$\sin\left((x+y+z)\tfrac{\pi}{2}\right) + \ln(xyz) = -1$$

$$x^3+y^3+z^3 - \tfrac{8}{\pi}\,\mathrm{arctg}\left(\tfrac{x+2y-z}{2}\right) = 1$$

definují na jistém okolí bodu (1,1,1) hledané funkce $y=y(x)$ a $z=z(x)$. Spočtěte $\frac{dy}{dx}(1)$ a $\frac{dz}{dx}(1)$!

(53)

Řešení

• Bod je splněn: OK. $\left(\sin\frac{3}{2}\pi + \ln 1 = -1;\quad 3 - \frac{8}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4} = 1\right)$

• Vztah pro jim hledané

• $\underbrace{\cos(\tfrac{\pi}{2}\cdot 3)}_{0}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{1} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$

• $\cos(\frac{\pi}{2}\cdot 3)\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{1} = \frac{\partial F_1}{\partial z}$

• $3 - \frac{8}{\pi}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x+2y-z}{2}\right)^2}\cdot 1 = \frac{\partial F_2}{\partial y}$

• $3 + \frac{8}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\partial F_2}{\partial z}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3-\frac{4}{\pi} & 3+\frac{2}{\pi} \end{pmatrix}$$ je reg. matice $\Rightarrow$ Funk. $\exists$!

2b

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2}\cdot 0\cdot\left(\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}+1\right) + 1 + \frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx} = -1}$$ 1b

$$3 + 3\frac{dy}{dx} + 3\frac{dz}{dx} - \frac{8}{\pi}\cdot\frac{1}{1+1^2}\left(\frac{1}{2}+\frac{dy}{dx}-\frac{1}{2}\frac{dz}{dx}\right) = 0$$ 1b

$$\left(3-\frac{4}{\pi}\right)\frac{dy}{dx} + \left(3+\frac{2}{\pi}\right)\frac{dz}{dx} = -3+\frac{2}{\pi}$$

$$\left(3-\frac{4}{\pi}\right)\left(-1-\frac{dz}{dx}\right) + \left(3+\frac{2}{\pi}\right)\frac{dz}{dx} = -3+\frac{2}{\pi}$$

$$\frac{dz}{dx}\left(\cancel{-3}+\frac{4}{\pi}+\cancel{3}+\frac{2}{\pi}\right) = \cancel{-3}+\frac{2}{\pi}+\cancel{3}+\frac{4}{\pi}$$

$$\frac{dz}{dx}\cdot\frac{6}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

$$\boxed{\frac{dz}{dx}(1) = \frac{1}{3}} \qquad \boxed{\frac{dy}{dx}(1) = -\frac{4}{3}}$$ 1b