Početní část zkoušky 30.5.2022

Jméno:

Skupina:

1. (7b) Nalezněte řešení ODR
$$x^3y''' + xy' - y = 6x$$
splňující $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$ a $y''(1) = 1$.

2. (7b) V závislosti na parametru $p \in \mathbb{R}$ rozhodněte o konvergenci mocninné řady, včetně kružnice konvergence. Pokud používáte nějaké věty či kritéria konvergence, okomentujte jejich použití.
$$\sum_{k=1}^{\infty} z^k \ln(1 + k^p)\operatorname{arctg}(1 + k^2).$$

3. (6b) Uvažujte funkci
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{4}{3}}}{(x^2+y^2)^\alpha} & (x,y) \neq 0 \\ 0 & (x,y) = 0. \end{cases}$$
V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ zjistěte, zda funkce f
a) je spojitá
b) má parciální derivace
c) má totální diferenciál
v bodě $(0,0)$.

4. (7b) Nalezněte globální extrémy (pokud existují) funkce
$$f(x,y) = |x| + |y|$$
na množině
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} \leq 1.$$
Nalezněte též body (pokud existují), ve kterých se tyto extrémy nabývají.

Teoretická část zkoušky 30.5.2022

Jméno:

Skupina:

1. (8b) (i) Definujte číselnou řadu.
   (ii) Definujte, co to znamená, že číselná řada konverguje/diverguje/osciluje.
   (iii) Formulujte a dokažte nutnou podmínku konvergence číselné řady.
   (iv) Formulujte a dokažte Bolzano–Cauchyovu podmínku konvergence číslené řady.
   (v) Formulujte a dokažte srovnávací kritérium (pro řady s obecnými členy).

2. (7b) (i) Definujte pojmy metrika a metrický prostor.
   (ii) Definujte pojem hustá podmnožina metrického prostoru a separabilní metrický prostor.
   (iii) Pomocí toho, že spojité funkce na uzavřeném intervalu $[a, b]$ můžeme v maximové metrice libovolně přesně aproximovat pomocí polynomů, ukažte, že $C([a, b])$ spolu s maximovou metrikou je separabilní metrický prostor.
   (iv) Uveďte příklad neseparabilního metrického prostoru a vysvětlete.

3. (8b) (i) Definujte funkcionál.
   (ii) Definujte první a druhý Gateauxův diferenciál a první Fréchetův diferenciál.
   (iii) Definujte pojem lokální minimum funkcionálu.
   (iv) Formulujte a dokažte Eulerovu nutnou podmínku existence lokálního minima funkcionálu.
   (v) Formulujte a dokažte Lagrangeovu nutnou podmínku existence lokálního minima funkcionálu.
   (vi) Formulujte a dokažte Lagrangeovu postačující podmínku existence lokálního minima funkcionálu.