Početní část zkoušky 27.6.2022

Jméno:

Skupina:

1. (6b) Nalezněte řešení rovnice
$$3y' + 2xy = 2xy^{-2}\mathrm{e}^{-2x^2}$$
splňující a) $y(0) = -1$, b) $y(0) = 1$.

2. (6b) V závislosti na parametrech p, $q \in \mathbb{R}$ vyšetřete, kdy konverguje, diverguje nebo osciluje číselná řada
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(\frac{1}{n^p})}{\ln(1 + \frac{1}{\operatorname{arctg}(\frac{1}{n^q})})}.$$
Pokud používáte nějaké kritérium konvergence řady nebo nějakou větu, vysvětlete.

3. (7b) Ověřte, že předpisy
$$\mathrm{e}^{ux}\cos\left(\frac{v}{y^2}\right) = \frac{x^2}{\sqrt{2}}$$
$$\mathrm{e}^{ux}\sin\left(\frac{v}{y^2}\right) = \frac{y^2}{\sqrt{2}}$$
definují na jistém okolí bodu $x = y = 1$, $u = 0$, $v = \frac{\pi}{4}$ hladké funkce $u = u(x, y)$ a $v = v(x, y)$. Spočtěte $\mathrm{d}u(1, 1)$ a $\mathrm{d}v(1, 1)$.

4. (8b) Nalezněte lokální extrémy (pokud existují) funkce (a, $b > 0$)
$$f(x, y) = xy\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$
na množině $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$.

   Nalezněte též body (pokud existují), ve kterých se tyto extrémy nabývají. Nabývá funkce na uzávěru této množiny svých globálních extrémů? Vysvětlete.

Teoretická část zkoušky 27.6.2022

Jméno:

Skupina:

1. (7b) (i) Definujte pojmy lineární ODR n-tého řadu a řešení této rovnice.
   (ii) Formulujte příslušnou větu o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy pro lineární ODR n-tého řádu.
   (iii) Definujte pojmy lineárně závislé/nezávislé funkce.
   (iv) Ukažte, že množina řešení homogenní lineární ODR n-tého řádu tvoří vektorový podprostor $C^n([a, b])$ s dimenzí n.
   (v) Definujte pojem fundamentální systém řešení homogenní lineární ODR n-tého řádu.

2. (8b) (i) Definujte pojem cauchyovská posloupnost prvků v metrickém prostoru.
   (ii) Ukažte, že každá konvergentní posloupnost v metrickém prostoru je konvergentní.
   (iii) Ukažte, že existuje metrický prostor a cauchyovská posloupnost jeho prvků, která není v daném metrickém prostoru konvergentní.
   (iv) Definujte pojmy úplný metrický prostor, úplný lineární normovaný prostor a úplný unitární prostor.
   (v) Definujte pojmy kompaktní podmnožina metrického prostoru, uzavřená podmnožina metrického prostoru a omezená podmnožina metrického prostoru.
   (vi) Ukažte, že kompaktní podmnožina metrického prostoru je omezená a uzavřená.

3. (8b) (i) Definujte Legendreovu transformaci konvexních funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$.
   (ii) Formujte a dokažte vlastnosti Legendreovy transformace funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$.
   (iii) Formulujte Lagrangeovy rovnice klasické mechaniky.
   (iv) Formulujte a dokažte větu o vztahu Lagrangeových a Hamiltonových rovnic klasické mechaniky.