

Posloupnosti a řady funkcí

Posloupnosti funkcí

Najděte obor bodové konvergence a hodnotu limity posloupnosti funkcí:

1.

$$e^x \frac{\sin x \sin(2x) \dots \sin(nx)}{\sqrt{n}}$$

2.

$$\frac{1 + x^{2n+1}}{1 + x^{2n}}$$

3.

$$\sin(\pi x n)$$

Zjistěte, zda na daných množinách konvergují posloupnosti funkcí stejnoměrně.

4.

$$x^n - x^{n+1} \quad \text{na } [0, 1]$$

5.

$$x^n - x^{2n} \quad \text{na } [0, 1]$$

6.

$$\operatorname{arctg}(nx) \quad \text{na } (0, \infty)$$

7.

$$\frac{nx}{1 + n^2 x^2} \quad \text{na a) } \{x \in \mathbb{C}; |x| \leq \varepsilon\} \quad \text{b) } \{x \in \mathbb{C}; |x| \geq \varepsilon\}$$

8.

$$\sin(\pi x^n) \quad \text{na } [0, 1]$$

9.

$$\frac{x}{n} \ln\left(\frac{x}{n}\right) \quad \text{na a) } (0, \varepsilon) \quad \text{b) } (\varepsilon, \infty)$$

10. $\sqrt[n]{1+x^n}$ na $[0, \infty)$

11. $\frac{1+x^{n+1}}{1+x^n}$ na $[0, \infty)$

Zjistěte, zda jsou následující výroky pravdivé:

12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2} dx = \int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} \right) dx$

13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4} dx = \int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1+n^2x^4} \right) dx$

14. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x^n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} x^n \right)$