Matematika pro fyziky I

Milan Pokorný

Přednáška 5.1.2023

Opakování I

Věta (10 O úplnosti trigonometrického systému V 19.3.1)

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $l > 0$. Pak trigonometrický systém odpovídající periodě l je úplný na $L^2((a, a+l))$.

Věta (12 Riemann–Lebesgueovo lemma V 19.3.7)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $l > 0$ a $f \in L^1((a, a+l))$. Pak

$$\int_a^{a+l} f(x) \cos\left(\frac{2k\pi}{l} x\right) \mathrm{d}x \overset{k\to\infty}{\to} 0 \qquad a \qquad \int_a^{a+l} f(x) \sin\left(\frac{2k\pi}{l} x\right) \mathrm{d}x \overset{k\to\infty}{\to} 0.$$

Speciálně $a_k \to 0$ a $b_k \to 0$ pro $k \to \infty$.

Opakování I

Věta (10 O úplnosti trigonometrického systému V 19.3.1)

Nechť $a \in \mathbb{R}$ *a* $l > 0$*. Pak trigonometrický systém odpovídající periodě* l *je úplný na* $L^2((a, a + l))$*.*

Věta (12 Riemann–Lebesgueovo lemma V 19.3.7)

Nechť $a \in \mathbb{R}$*,* $l > 0$ *a* $f \in L^1((a, a + l))$*. Pak*

$$\int_a^{a+l} f(x) \cos\left(\frac{2k\pi}{l} x\right) \mathrm{d}x \overset{k\to\infty}{\to} 0 \qquad a \qquad \int_a^{a+l} f(x) \sin\left(\frac{2k\pi}{l} x\right) \mathrm{d}x \overset{k\to\infty}{\to} 0.$$

Speciálně $a_k \to 0$ *a* $b_k \to 0$ *pro* $k \to \infty$*.*

Opakování II

Věta (13 O vztahu hladkosti funkce a chování Fourierových koeficientů V 19.3.10)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $l > 0$ *a* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
(i) *Nechť* $f \in C^n(\mathbb{R})$, f *je* l*-periodická,* $f^{(n+1)}$ *existuje v intervalu* $(a, a+l)$ *až na konečně mnoho bodů a je po částech spojitá na* $[a, a+l]$. *Pak*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^n(|a_k| + |b_k|) < \infty.$$

Dále $F_{f,n} \rightrightarrows f$ *na* $[a, a+l]$, *řadu* F_f *lze až* n*-krát derivovat člen po členu, výsledné řady konvergují stejnoměrně na* $[a, a+l]$ *k odpovídajícím derivacím funkce* f *a jsou jejich Fourierovými řadami.*
(ii) *Jestliže* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *splňuje* $\sum_{k=1}^{\infty} k^n(|a_k| + |b_k|) < \infty$, *pak trigonometrická řada odpovídající koeficientům* a_k, b_k *konverguje stejnoměrně na* $\mathbb{R}$, *součet je* l*-periodická* $C^n([a, a+l])$*-funkce, řadu lze až* n*-krát derivovat člen po členu a výsledné řady konvergují stejnoměrně na* $\mathbb{R}$ *k odpovídajícím derivacím součtu řady a jsou jejich Fourierovými řadami.*

Opakování III

Věta (14 O integrálním zápisu Fourierovy řady V 19.3.11)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $l > 0$, $f \in L^1((a, a+l))$, f je l-periodická a $n \in \mathbb{N}$. Pak pro n-tý částečný součet Fourierovy řady platí

$$F_{f,n}(x) = \int_a^{a+l} D_n(x-t) f(t) \, \mathrm{d}t \qquad \text{na } \mathbb{R},$$

kde

$$D_n(z) := \begin{cases} \frac{2n+1}{l} & \text{pro } z = ml,\, m \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{l} \frac{\sin(\frac{2\pi}{l}(n+\frac{1}{2})z)}{\sin(\frac{2\pi}{l}\frac{z}{2})} & \text{jinak.} \end{cases}$$

Opakování IV

Lemma (1 O vlastnostech Dirichletova jádra L 19.3.13)

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $l > 0$.
(i) *Dirichletovo jádro je sudé, nekonečně hladké, l-periodické a*

$$\int_a^{a+l} D_n(z)\,\mathrm{d}z = 1.$$

(ii) *Jestliže $h \in L^1((a, a+l))$, pak*

$$\int_a^{a+l} h(z) \sin\left(\frac{2\pi}{l}\left(n + \frac{1}{2}\right)z\right) \mathrm{d}z \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Lemma (2 O lokalizaci V 19.3.14)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $l > 0$, $f \in L^1((a, a+l))$ a f je l-periodická. Nechť $x \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$ a $\delta \in (0, \frac{l}{2})$. Pak

$$F_f(x) = A \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_0^{\delta} \left(f(x+z) + f(x-z) - 2A\right) D_n(z)\,\mathrm{d}z \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Opakování IV

Lemma (1 O vlastnostech Dirichletova jádra L 19.3.13)

Nechť $a \in \mathbb{R}$ *a* $l > 0$.
(i) *Dirichletovo jádro je sudé, nekonečně hladké, l-periodické a*

$$\int_a^{a+l} D_n(z)\,\mathrm{d}z = 1.$$

(ii) *Jestliže* $h \in L^1((a, a+l))$, *pak*

$$\int_a^{a+l} h(z) \sin\left(\frac{2\pi}{l}\left(n + \frac{1}{2}\right)z\right) \mathrm{d}z \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Lemma (2 O lokalizaci V 19.3.14)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $l > 0$, $f \in L^1((a, a+l))$ *a* f *je l-periodická. Nechť* $x \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$ *a* $\delta \in (0, \frac{l}{2})$. *Pak*

$$F_f(x) = A \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_0^{\delta} \big(f(x+z) + f(x-z) - 2A\big) D_n(z)\,\mathrm{d}z \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Opakování V

Věta (15 Diniho kritérium V 19.3.15)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $l > 0$, $f \in L^1((a, a+l))$, f je l-periodická a $x \in \mathbb{R}$. Nechť existují $\delta > 0$ a $A \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\int_0^\delta \frac{|f(x+z) + f(x-z) - 2A|}{z} \,\mathrm{d}z$$

konverguje. Pak $F_f(x) = A$.

Lemma (3 O vlivu translace na Fourierovy řady L 19.3.17)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $l > 0$, $f \in L^1((a, a+l))$, f je l-periodická a $b > 0$. Položme $g(x) := f(x+b)$ na $\mathbb{R}$. Pak pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí

$$F_{g,n}(x) = F_{f,n}(x+b).$$

Speciálně pokud $F_{f,n} \rightrightarrows F_f$ na $\mathbb{R}$, pak $F_{g,n} \rightrightarrows F_g$ na $\mathbb{R}$.

Věta (15 Diniho kritérium V 19.3.15)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $l > 0$, $f \in L^1((a, a+l))$, f je l-periodická a $x \in \mathbb{R}$. Nechť existují $\delta > 0$ a $A \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\int_0^\delta \frac{|f(x+z) + f(x-z) - 2A|}{z} \, \mathrm{d}z$$

konverguje. Pak $F_f(x) = A$.

Lemma (3 O vlivu translace na Fourierovy řady L 19.3.17)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $l > 0$, $f \in L^1((a, a+l))$, f je l-periodická a $b > 0$. Položme $g(x) := f(x+b)$ na $\mathbb{R}$. Pak pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí

$$F_{g,n}(x) = F_{f,n}(x+b).$$

Speciálně pokud $F_{f,n} \rightrightarrows F_f$ na $\mathbb{R}$, pak $F_{g,n} \rightrightarrows F_g$ na $\mathbb{R}$.

Věta (16 O konvergenci Fourierovy řady V 19.3.16)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $l > 0$, f *je* l*-periodická,* f' *existuje v intervalu* $(a, a+l)$ *až na konečně mnoho bodů,* f *a* f' *jsou po částech spojité na* $[a, a+l]$. *Pak pro všechna* $x \in \mathbb{R}$ *platí*

$$F_f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Pokud je navíc f *spojitá na jistém intervalu* $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, *pak dokonce platí*

$$F_{f,n} \rightrightarrows f \qquad \text{na } (\alpha + \delta, \beta - \delta)$$

pro každé $\delta \in (0, \frac{\beta - \alpha}{2})$.

Věta (17 O integraci Fourierových řad V 19.3.20)

Nechť $l > 0$, f je l-periodická a po částech spojitá na intervalu $(0, l)$. Fourierovy koeficienty funkce f značme a_k a b_k. Označme

$$g(x) := \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{a_0}{2}x.$$

Pak je g l-periodická spojitá funkce, existuje vlastní g' všude v $(0, l)$ až na konečný počet bodů a je po částech spojitá na $[0, l]$. Dále platí

$$F_g(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos\left(\frac{2k\pi}{l}x\right) + B_k \sin\left(\frac{2k\pi}{l}x\right)\right),$$

kde

$$\frac{A_0}{2} = \frac{l}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k}, \qquad A_k = -\frac{l}{2\pi}\frac{b_k}{k} \qquad a \qquad B_k = \frac{l}{2\pi}\frac{a_k}{k}$$

pro všechna $k \in \mathbb{N}$. Navíc $F_{g,n} \rightrightarrows g$ na $\mathbb{R}$.

18.4 Fourierovy řady odpovídající trigonometrickému systému III

Definice (7 Variace funkce, funkce s konečnou variací D 19.4.1)

Nechť $[a,b] \subset \mathbb{R}$ a $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definovaná na $[a,b]$. Pak veličinu

$$V_a^b(f) := \sup_D \sum_{j=1}^{n_D} |f(x_j) - f(x_{j-1})|,$$

kde supremum počítáme přes všechna konečná dělení intervalu $[a,b]$ vyjádřená jako $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n_D} = b$, se nazývá *variace* funkce f na intervalu $[a,b]$. Jestliže $V_a^b(f) < \infty$, říkáme, že f má *konečnou variaci* na $[a,b]$. Definujme dále funkci

$$v(x) := V_a^x(f) \qquad \text{pro } x \in [a,b].$$

Definice (8 Absolutně spojitá funkce D 19.4.9)

Nechť $[a,b] \subset \mathbb{R}$ a $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definovaná na $[a,b]$. Řekneme, že funkce f je *absolutně spojitá* na $[a,b]$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ s následující vlastností. Jestliže $n \in \mathbb{N}$ a $\{(a_j,b_j)\}_{j=1}^n$ je soubor po dvou disjunktních podintervalů intervalu $[a,b]$, pak

$$\sum_{j=1}^{n}(b_j - a_j) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon.$$

18.4 Fourierovy řady odpovídající trigonometrickému systému III

Definice (7 Variace funkce, funkce s konečnou variací D 19.4.1)

Nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$ a $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definovaná na $[a, b]$. Pak veličinu

$$V_a^b(f) := \sup_D \sum_{j=1}^{n_D} |f(x_j) - f(x_{j-1})|,$$

kde supremum počítáme přes všechna konečná dělení intervalu $[a, b]$ vyjádřená jako $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n_D} = b$, se nazývá *variace* funkce f na intervalu $[a, b]$. Jestliže $V_a^b(f) < \infty$, říkáme, že f má *konečnou variaci* na $[a, b]$. Definujme dále funkci

$$v(x) := V_a^x(f) \qquad \text{pro } x \in [a, b].$$

Definice (8 Absolutně spojitá funkce D 19.4.9)

Nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$ a $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definovaná na $[a, b]$. Řekneme, že funkce f je *absolutně spojitá* na $[a, b]$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ s následující vlastností. Jestliže $n \in \mathbb{N}$ a $\{(a_j, b_j)\}_{j=1}^n$ je soubor po dvou disjunktních podintervalů intervalu $[a, b]$, pak

$$\sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon.$$

Věta (18 O vztahu hladkosti funkce a chování Fourierových koeficientů (verze s absolutní spojitostí) V 19.4.18)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $l > 0$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je l-periodická, $f \in C^n(\mathbb{R})$, $f^{(n)}$ je absolutně spojitá na $[a, a+l]$ a $f^{(n+1)} \in L^2((a, a+l))$. Pak

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^n(|a_k| + |b_k|) < \infty.$$

Dále $F_{f,n} \rightrightarrows f$ na $[a, a+l]$, řadu F_f lze až n-krát derivovat člen po členu, výsledné řady konvergují stejnoměrně na $[a, a+l]$ k odpovídajícím derivacím funkce f a jsou jejich Fourierovými řadami.

Věta (19 Dirichlet–Jordanovo kritérium V 19.4.21)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $l > 0$, f je l-periodická, $f \in L^1((a, a+l))$ a f má konečnou variaci na $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$.
(i) Pak v každém bodě $x \in (\alpha, \beta)$ platí $F_f(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.
(ii) Je-li navíc f spojitá na $[\alpha, \beta]$, pak pro všechna $\delta \in (0, \frac{\beta-\alpha}{2})$ platí $F_{f,n} \rightrightarrows f$ na $[\alpha+\delta, \beta-\delta]$.

18.4 Fourierovy řady odpovídající trigonometrickému systému IV

Věta (18 O vztahu hladkosti funkce a chování Fourierových koeficientů (verze s absolutní spojitostí) V 19.4.18)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $l > 0$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je l-periodická, $f \in C^n(\mathbb{R})$, $f^{(n)}$ je absolutně spojitá na $[a, a+l]$ a $f^{(n+1)} \in L^2((a, a+l))$. Pak

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^n(|a_k| + |b_k|) < \infty.$$

Dále $F_{f,n} \rightrightarrows f$ na $[a, a+l]$, řadu F_f lze až n-krát derivovat člen po členu, výsledné řady konvergují stejnoměrně na $[a, a+l]$ k odpovídajícím derivacím funkce f a jsou jejich Fourierovými řadami.

Věta (19 Dirichlet–Jordanovo kritérium V 19.4.21)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $l > 0$, f je l-periodická, $f \in L^1((a, a+l))$ a f má konečnou variaci na $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$.

(i) *Pak v každém bodě $x \in (\alpha, \beta)$ platí $F_f(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.*

(ii) *Je-li navíc f spojitá na $[\alpha, \beta]$, pak pro všechna $\delta \in (0, \frac{\beta-\alpha}{2})$ platí $F_{f,n} \rightrightarrows f$ na $[\alpha+\delta, \beta-\delta]$.*

Věta (20 Fejérova věta V 19.4.24)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $l > 0$, f *je* l*-periodická funkce a* $f \in L^1((a, a+l))$.

(i) *Pak v každém bodě* $x \in \mathbb{R}$, *ve kterém je limita* $\lim_{t \to 0} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}$ *konečná, platí*

$$\sigma_{f,n}(x) \overset{n\to\infty}{\to} \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

(ii) *Pokud je navíc* f *spojitá na* $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ *a v krajních bodech je spojitá z obou stran, pak*

$$\sigma_{f,n} \rightrightarrows f \qquad \text{na } [\alpha, \beta].$$