Matematika pro fyziky I

Milan Pokorný

Přednáška 4.10.2022

Důsledek (1 Lokálně stejnoměrná konvergence mocninné řady Ds 14.2.6)

Nechť mocninná řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ *má poloměr konvergence* $R \in (0,\infty]$. *Pak konverguje lokálně stejnoměrně na*

$$B_R(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \colon |z-z_0| < R\}.$$

Věta (5 Leibnizovo kritérium pro stejnoměrnou konvergenci V 14.2.8)

Nechť $\{a_k\}$ *je posloupnost funkcí z* $\mathbb{R}^N$ *do* $\mathbb{R}$ *definovaných na* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *splňujících* $0 \le a_{k+1}(x) \le a_k(x)$ *pro všechna* $k \in \mathbb{N}$ *a všechna* $x \in \Omega$. *Pak*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k \text{ konverguje stejnoměrně na } \Omega \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_k \rightrightarrows 0 \text{ na } \Omega.$$

Důsledek (1 Lokálně stejnoměrná konvergence mocninné řady Ds 14.2.6)

Nechť mocninná řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ má poloměr konvergence $R \in (0,\infty]$. Pak konverguje lokálně stejnoměrně na

$$B_R(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \colon |z-z_0| < R\}.$$

Věta (5 Leibnizovo kritérium pro stejnoměrnou konvergenci V 14.2.8)

Nechť $\{a_k\}$ je posloupnost funkcí z $\mathbb{R}^N$ do $\mathbb{R}$ definovaných na $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ splňujících $0 \leq a_{k+1}(x) \leq a_k(x)$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$ a všechna $x \in \Omega$. Pak

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k \text{ konverguje stejnoměrně na } \Omega \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_k \rightrightarrows 0 \text{ na } \Omega.$$

13.2 Kritéria stejnoměrné konvergence řad funkcí II

Věta (6 Abelovo a Dirichletovo kritérium pro stejnoměrnou konvergenci D 14.2.9 a V 14.2.10)

Nechť $\{a_k\}$ je posloupnost reálných funkcí definovaných na $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ splňujících

$$0 \leq a_{k+1}(x) \leq a_k(x)$$

pro všechna $k \in \mathbb{N}$ a všechna $x \in \Omega$. Nechť $\{b_k\}$ je posloupnost komplexních funkcí definovaných na Ω.
(Dirichlet) Jestliže $a_k \rightrightarrows 0$ na Ω a posloupnost částečných součtů posloupnosti $\{b_k\}$ je stejně stejnoměrně omezená (tj. $|\sum_{k=1}^{n} b_k| \leq K$ stejnoměrně vůči $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \Omega$), pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konverguje stejnoměrně na Ω.
(Abel) Jestliže $\{a_k\}$ je stejně stejnoměrně omezená na Ω a $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konverguje stejnoměrně na Ω, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konverguje stejnoměrně na Ω.

Věta (7; V 9.7 Abelova věta V 14.2.11)

Nechť $\{a_k\} \subset \mathbb{C}$ *a odpovídající mocninná řada* $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *má poloměr konvergence* $R \in (0, \infty)$. *Je-li* $\varphi \in [0, 2\pi)$ *takové, že pro* $z = R\mathrm{e}^{i\varphi}$ *konverguje řada* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, *pak mocninná řada* $f(z)$ *konverguje stejnoměrně na množině* $\{t\mathrm{e}^{i\varphi} : t \in [0, R]\}$ *a funkce* $t \mapsto f(t\mathrm{e}^{i\varphi})$ *je spojitá na* $[0, R]$.

Věta (8 Moore–Osgoodova věta V 14.3.1)

Nechť $\{\varphi_n\}$ *je posloupnost funkcí z* $\mathbb{R}$ *do* $\mathbb{R}$ *definovaných na* $(a, b) \subset \mathbb{R}$ *a* $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Nechť* $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ *na* (a, b) *a pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *existuje vlastní* $\lim_{x\to b_-} \varphi_n(x)$. *Pak existuje vlastní* $\lim_{x\to b_-} \varphi(x)$ *a platí*

$$\lim_{x\to b_-} \varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to b_-} \varphi_n(x).$$

Věta (9 Moore–Osgoodova věta pro řady funkcí Pozn. 14.3.3)

Nechť řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} v_n \rightrightarrows S$ *na* (a, b) *a nechť pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *existuje vlastní* $\lim_{x\to b_-} v_n(x) = d_n$. *Pak číselná řada* $\sum_{n=1}^{\infty} d_n = d$ *konverguje. Navíc* $d = \lim_{x\to b_-} S(x)$.

Věta (8 Moore–Osgoodova věta V 14.3.1)

Nechť $\{\varphi_n\}$ *je posloupnost funkcí z* $\mathbb{R}$ *do* $\mathbb{R}$ *definovaných na* $(a, b) \subset \mathbb{R}$ *a* $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Nechť* $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ *na* (a, b) *a pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *existuje vlastní* $\lim_{x \to b_-} \varphi_n(x)$. *Pak existuje vlastní* $\lim_{x \to b_-} \varphi(x)$ *a platí*

$$\lim_{x \to b_-} \varphi(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to b_-} \varphi_n(x).$$

Věta (9 Moore–Osgoodova věta pro řady funkcí Pozn. 14.3.3)

Nechť řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} v_n \rightrightarrows S$ *na* (a, b) *a nechť pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *existuje vlastní* $\lim_{x \to b_-} v_n(x) = d_n$. *Pak číselná řada* $\sum_{n=1}^{\infty} d_n = d$ *konverguje. Navíc* $d = \lim_{x \to b_-} S(x)$.