Matematika pro fyziky I

Milan Pokorný

Přednáška 18.10.2022

Opakování I

Definition (σ-algebra D 15.2.1)

Nechť X je množina a $\mathcal{M}$ je systém jejích podmnožin. Řekneme, že $\mathcal{M}$ je *σ-algebra* na množině X, jestliže splňuje
(i) $X \in \mathcal{M}$
(ii) jestliže $A \in \mathcal{M}$, pak $X \setminus A \in \mathcal{M}$
(iii) jestliže $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$, pak $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{M}$.

Definice (Míra D 15.2.9)

Nechť X je množina a $\mathcal{M}$ je σ-algebra na X. Zobrazení $\mu\colon \mathcal{M} \to [0, \infty]$ se nazývá *míra*, jestliže je σ-aditivní na $\mathcal{M}$ (jsou-li $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ po dvou disjunktní, pak $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$). Trojice $(X, \mathcal{M}, \mu)$ se pak nazývá *měřitelný prostor* (nebo *prostor s mírou*). Budeme vždy předpokládat, že existuje $A \in \mathcal{M}$ tak, že $\mu(A) < \infty$.

Opakování I

Definition (σ-algebra D 15.2.1)

Nechť X je množina a $\mathcal{M}$ je systém jejích podmnožin. Řekneme, že $\mathcal{M}$ je *σ-algebra* na množině X, jestliže splňuje
(i) $X \in \mathcal{M}$
(ii) jestliže $A \in \mathcal{M}$, pak $X \setminus A \in \mathcal{M}$
(iii) jestliže $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$, pak $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{M}$.

Definice (Míra D 15.2.9)

Nechť X je množina a $\mathcal{M}$ je σ-algebra na X. Zobrazení $\mu\colon \mathcal{M} \to [0, \infty]$ se nazývá *míra*, jestliže je σ-aditivní na $\mathcal{M}$ (jsou-li $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ po dvou disjunktní, pak $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$). Trojice $(X, \mathcal{M}, \mu)$ se pak nazývá *měřitelný prostor* (nebo *prostor s mírou*). Budeme vždy předpokládat, že existuje $A \in \mathcal{M}$ tak, že $\mu(A) < \infty$.

14.3 Konstrukce Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^N$ I

Definice (8 Lebesgueova vnější míra D 15.3.1)

Nechť $A \subset \mathbb{R}^N$. Položme

$$\lambda_N^*(A) = \inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{vol} I_j \colon \{I_j\}_{j=1}^{\infty} \text{ je spočetné pokrytí } A$$

$$\text{tvořené omezenými otevřenými intervaly}\Big\}.$$

Zobrazení $A \mapsto \lambda_N^*(A)$ se nazývá *Lebesgueova vnější míra*.

Věta (5 O vlastnostech Lebesgueovy vnější míry V 15.3.4)

Lebesgueova vnější míra má následující vlastnosti:
(i) *je monotonní (jestliže $A \subset B$, pak $\lambda_N^*(A) \leq \lambda_N^*(B)$)*
(ii) *je σ-subaditivní (jestliže $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^N$, pak $\lambda_N^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_N^*(A_j)$)*
(iii) *je translačně invariantní (jestliže $x \in \mathbb{R}^N$ a $A \subset \mathbb{R}^N$, pak $\lambda_N^*(A + x) = \lambda_N^*(A)$)*
(iv) *při α-násobném roztažení (pro $\alpha \in (0, \infty)$) se Lebesgueova vnější míra množiny změní na α^N-násobek původní hodnoty*
(v) $\lambda_N^*(I) = \operatorname{vol} I$ *pro každý omezený interval v $\mathbb{R}^N$.*

14.3 Konstrukce Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^N$ I

Definice (8 Lebesgueova vnější míra D 15.3.1)

Nechť $A \subset \mathbb{R}^N$. Položme

$$\lambda_N^*(A) = \inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{vol} I_j : \{I_j\}_{j=1}^{\infty} \text{ je spočetné pokrytí } A$$

$$\text{tvořené omezenými otevřenými intervaly}\Big\}.$$

Zobrazení $A \mapsto \lambda_N^*(A)$ se nazývá *Lebesgueova vnější míra*.

Věta (5 O vlastnostech Lebesgueovy vnější míry V 15.3.4)

Lebesgueova vnější míra má následující vlastnosti:
(i) *je monotonní (jestliže $A \subset B$, pak $\lambda_N^*(A) \leq \lambda_N^*(B)$)*
(ii) *je σ-subaditivní (jestliže $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^N$, pak $\lambda_N^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_N^*(A_j)$)*
(iii) *je translačně invariantní (jestliže $x \in \mathbb{R}^N$ a $A \subset \mathbb{R}^N$, pak $\lambda_N^*(A + x) = \lambda_N^*(A)$)*
(iv) *při α-násobném roztažení (pro $\alpha \in (0, \infty)$) se Lebesgueova vnější míra množiny změní na α^N-násobek původní hodnoty*
(v) $\lambda_N^*(I) = \operatorname{vol} I$ *pro každý omezený interval v $\mathbb{R}^N$.*

Definice (9 Lebesgueovsky měřitelná množina a Lebesgueova míra D 15.3.5)

Nechť $A \subset \mathbb{R}^N$. Řekneme, že A je *lebesgueovsky měřitelná*, jestliže pro každou množinu $T \subset \mathbb{R}^N$ platí

$$\lambda_N^*(T) = \lambda_N^*(T \cap A) + \lambda_N^*(T \setminus A).$$

Množinu všech lebesgueovsky měřitelných množin značíme $\mathcal{M}_N^*$ a zúžení Lebesgueovy vnější míry z $\exp \mathbb{R}^N$ na $\mathcal{M}_N^*$ budeme nazývat *Lebesgueovou mírou* a značit ji λ_N.

Věta (6 O korektnosti definice Lebesgueovy míry 1 V 15.3.7)

Systém $\mathcal{M}_N^*$ je uzavřený na konečné sjednocení a konečné průniky a zobrazení λ_N je konečně aditivní na $\mathcal{M}_N^*$.

Věta (7 O korektnosti definice Lebesgueovy míry 2 V 15.3.7)

Systém $\mathcal{M}_N^*$ je σ-algebra a zobrazení λ_N je míra na σ-algebře $\mathcal{M}_N^*$.

14.3 Konstrukce Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^N$ II

Definice (9 Lebesgueovsky měřitelná množina a Lebesgueova míra D 15.3.5)

Nechť $A \subset \mathbb{R}^N$. Řekneme, že A je *lebesgueovsky měřitelná*, jestliže pro každou množinu $T \subset \mathbb{R}^N$ platí

$$\lambda_N^*(T) = \lambda_N^*(T \cap A) + \lambda_N^*(T \setminus A).$$

Množinu všech lebesgueovsky měřitelných množin značíme $\mathcal{M}_N^*$ a zúžení Lebesgueovy vnější míry z $\exp \mathbb{R}^N$ na $\mathcal{M}_N^*$ budeme nazývat *Lebesgueovou mírou* a značit ji λ_N.

Věta (6 O korektnosti definice Lebesgueovy míry 1 V 15.3.7)

Systém $\mathcal{M}_N^*$ je uzavřený na konečné sjednocení a konečné průniky a zobrazení λ_N je konečně aditivní na $\mathcal{M}_N^*$.

Věta (7 O korektnosti definice Lebesgueovy míry 2 V 15.3.7)

Systém $\mathcal{M}_N^*$ je σ-algebra a zobrazení λ_N je míra na σ-algebře $\mathcal{M}_N^*$.

14.3 Konstrukce Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^N$ II

Definice (9 Lebesgueovsky měřitelná množina a Lebesgueova míra D 15.3.5)

Nechť $A \subset \mathbb{R}^N$. Řekneme, že A je *lebesgueovsky měřitelná*, jestliže pro každou množinu $T \subset \mathbb{R}^N$ platí

$$\lambda_N^*(T) = \lambda_N^*(T \cap A) + \lambda_N^*(T \setminus A).$$

Množinu všech lebesgueovsky měřitelných množin značíme $\mathcal{M}_N^*$ a zúžení Lebesgueovy vnější míry z $\exp \mathbb{R}^N$ na $\mathcal{M}_N^*$ budeme nazývat *Lebesgueovou mírou* a značit ji λ_N.

Věta (6 O korektnosti definice Lebesgueovy míry 1 V 15.3.7)

Systém $\mathcal{M}_N^*$ je uzavřený na konečné sjednocení a konečné průniky a zobrazení λ_N je konečně aditivní na $\mathcal{M}_N^*$.

Věta (7 O korektnosti definice Lebesgueovy míry 2 V 15.3.7)

Systém $\mathcal{M}_N^*$ je σ-algebra a zobrazení λ_N je míra na σ-algebře $\mathcal{M}_N^*$.

Věta (8 O lebesgueovské měřitelnosti otevřených množin V 15.3.8)

Každá otevřená množina v $\mathbb{R}^N$ je lebesgueovsky měřitelná.

Věta (9 O úplnosti Lebesgueovy míry V 15.3.9)

Lebesgueova míra na $\mathbb{R}^N$ je úplná. Dokonce každá množina splňující $\lambda_N^*(A) = 0$ je lebesgueovsky měřitelná.

14.3 Konstrukce Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^N$ III

Věta (8 O lebesgueovské měřitelnosti otevřených množin V 15.3.8)

Každá otevřená množina v $\mathbb{R}^N$ je lebesgueovsky měřitelná.

Věta (9 O úplnosti Lebesgueovy míry V 15.3.9)

Lebesgueova míra na $\mathbb{R}^N$ je úplná. Dokonce každá množina splňující $\lambda_N^*(A) = 0$ je lebesgueovsky měřitelná.

14.3 Konstrukce Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^N$ IV

Důsledek (1 O lebesgueovské měřitelnosti intervalů v $\mathbb{R}^N$ Ds 15.3.11)
Libovolný interval $I \subset \mathbb{R}^N$ je lebesgueovsky měřitelný. Je-li navíc omezený, platí $\lambda_N(I) = \operatorname{vol} I$.

Důsledek (2 O invariantnosti Lebesgueovy míry vůči posunutí V 15.3.13)
Libovolný interval $I \subset \mathbb{R}^N$ je lebesgueovsky měřitelný. Je-li navíc omezený, platí $\lambda_N(I) = \operatorname{vol} I$.

Důsledek (3 O Lebesgueově míře roztažené množiny V 15.3.14)
Nechť $\alpha \in (0, \infty)$. Při α-násobném roztažení lebesgueovsky měřitelné množiny získáme lebesgueovsky měřitelnou množinu, jejíž Lebesgueova míra je rovna α^N-násobku původní hodnoty.

14.3 Konstrukce Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^N$ IV

Důsledek (1 O lebesgueovské měřitelnosti intervalů v $\mathbb{R}^N$ Ds 15.3.11)

Libovolný interval $I \subset \mathbb{R}^N$ je lebesgueovsky měřitelný. Je-li navíc omezený, platí $\lambda_N(I) = \operatorname{vol} I$.

Důsledek (2 O invariantnosti Lebesgueovy míry vůči posunutí V 15.3.13)

Libovolný interval $I \subset \mathbb{R}^N$ je lebesgueovsky měřitelný. Je-li navíc omezený, platí $\lambda_N(I) = \operatorname{vol} I$.

Důsledek (3 O Lebesgueově míře roztažené množiny V 15.3.14)

Nechť $\alpha \in (0, \infty)$. Při α-násobném roztažení lebesgueovsky měřitelné množiny získáme lebesgueovsky měřitelnou množinu, jejíž Lebesgueova míra je rovna α^N-násobku původní hodnoty.

Důsledek (1 O lebesgueovské měřitelnosti intervalů v $\mathbb{R}^N$ Ds 15.3.11)

Libovolný interval $I \subset \mathbb{R}^N$ je lebesgueovsky měřitelný. Je-li navíc omezený, platí $\lambda_N(I) = \operatorname{vol} I$.

Důsledek (2 O invariantnosti Lebesgueovy míry vůči posunutí V 15.3.13)

Libovolný interval $I \subset \mathbb{R}^N$ je lebesgueovsky měřitelný. Je-li navíc omezený, platí $\lambda_N(I) = \operatorname{vol} I$.

Důsledek (3 O Lebesgueově míře roztažené množiny V 15.3.14)

Nechť $\alpha \in (0, \infty)$. Při α-násobném roztažení lebesgueovsky měřitelné množiny získáme lebesgueovsky měřitelnou množinu, jejíž Lebesgueova míra je rovna α^N-násobku původní hodnoty.