Matematika pro fyziky I

Milan Pokorný

Přednáška 24.11.2022

Opakování I

Definice (1 Pomocný prostor $\mathcal{L}^p(\Omega)$ a veličina $\mathcal{N}_p$ D 16.1.1)

Nechť $p \in [1, \infty)$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je měřitelná. Pak $\mathcal{L}^p(\Omega)$ označuje množinu všech měřitelných numerických funkcí na Ω, pro které platí

$$\mathcal{N}_p(f) := \left(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Dále $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ označuje množinu všech měřitelných numerických funkcí na Ω, pro které platí

$$\mathcal{N}_\infty(f) = \operatorname{ess\,sup}_\Omega |f| := \inf_{\substack{P \subset \Omega \\ \lambda_N(P)=0}} \sup_{\Omega \setminus P} |f| < \infty.$$

Veličina ess sup se nazývá *esenciální supremum*.

Definice (2 Lebesgueův prostor $L^p(\Omega)$ D 16.1.5)

Nechť $p \in [1, \infty]$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je měřitelná. Pak *Lebesgueův prostor $L^p(\Omega)$* je množina všech tříd ekvivalence (vzhledem k rovnosti funkcí skoro všude) na $\mathcal{L}^p(\Omega)$.

Opakování I

Definice (1 Pomocný prostor $\mathcal{L}^p(\Omega)$ a veličina $\mathcal{N}_p$ D 16.1.1)

Nechť $p \in [1, \infty)$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je měřitelná. Pak $\mathcal{L}^p(\Omega)$ označuje množinu všech měřitelných numerických funkcí na Ω, pro které platí

$$\mathcal{N}_p(f) := \left(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Dále $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ označuje množinu všech měřitelných numerických funkcí na Ω, pro které platí

$$\mathcal{N}_\infty(f) = \operatorname{ess\,sup}_\Omega |f| := \inf_{\substack{P \subset \Omega \\ \lambda_N(P)=0}} \sup_{\Omega \setminus P} |f| < \infty.$$

Veličina ess sup se nazývá *esenciální supremum*.

Definice (2 Lebesgueův prostor $L^p(\Omega)$ D 16.1.5)

Nechť $p \in [1, \infty]$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je měřitelná. Pak *Lebesgueův prostor* $L^p(\Omega)$ je množina všech tříd ekvivalence (vzhledem k rovnosti funkcí skoro všude) na $\mathcal{L}^p(\Omega)$.

Opakování II

Lemma (1)

Množiny $L^p(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$, jsou vektorové prostory s obvyklými operacemi sčítání funkcí a násobení funkcí reálnými či komplexními čísly.

Lemma (2 Hölderova nerovnost V 16.2.1)

Nechť $p, q \in [1, \infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (s konvencí $\frac{1}{\infty} = 0$) a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je měřitelná. Jestliže $f \in L^p(\Omega)$ a $g \in L^q(\Omega)$, pak $fg \in L^1(\Omega)$ a

$$\int_\Omega |fg| \, \mathrm{d}x \le \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)},$$

kde $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \mathcal{N}_p(f)$.

Věta (1 Lebesgueovy prostory jsou lineární normované)

Vektorový prostor $L^p(\Omega)$, kde Ω je měřitelná, jsou normované lineární prostory, přičemž

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \qquad 1 \le p \le \infty$$

jsou normy na těchto prostorech.

Opakování II

Lemma (1)

Množiny $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, jsou vektorové prostory s obvyklými operacemi sčítání funkcí a násobení funkcí reálnými či komplexními čísly.

Lemma (2 Hölderova nerovnost V 16.2.1)

Nechť $p, q \in [1, \infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (s konvencí $\frac{1}{\infty} = 0$) a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je měřitelná. Jestliže $f \in L^p(\Omega)$ a $g \in L^q(\Omega)$, pak $fg \in L^1(\Omega)$ a

$$\int_\Omega |fg| \, \mathrm{d}x \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)},$$

kde $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \mathcal{N}_p(f)$.

Věta (1 Lebesgueovy prostory jsou lineární normované)

Vektorový prostor $L^p(\Omega)$, kde Ω je měřitelná, jsou normované lineární prostory, přičemž

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \qquad 1 \leq p \leq \infty$$

jsou normy na těchto prostorech.

Opakování II

Lemma (1)

Množiny $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, jsou vektorové prostory s obvyklými operacemi sčítání funkcí a násobení funkcí reálnými či komplexními čísly.

Lemma (2 Hölderova nerovnost V 16.2.1)

Nechť $p, q \in [1, \infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (s konvencí $\frac{1}{\infty} = 0$) a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je měřitelná. Jestliže $f \in L^p(\Omega)$ a $g \in L^q(\Omega)$, pak $fg \in L^1(\Omega)$ a

$$\int_\Omega |fg| \, \mathrm{d}x \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)},$$

kde $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \mathcal{N}_p(f)$.

Věta (1 Lebesgueovy prostory jsou lineární normované)

Vektorový prostor $L^p(\Omega)$, kde Ω je měřitelná, jsou normované lineární prostory, přičemž

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \qquad 1 \leq p \leq \infty$$

jsou normy na těchto prostorech.

Definice (3 Nosič funkce D 16.4.1)

Nechť (X, ϱ) je metrický prostor a $f : X \to \mathbb{R}$ je funkce. *Nosičem funkce f* nazýváme (uzavřenou) množinu

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in D_f : f(x) \neq 0\}}.$$

Lemma (4 L 16.4.2)

Nechť (M, ϱ) je metrický prostor a $M_1 \subset M_2 \subset M$. Jestliže M_1 je hustá v M_2 a M_2 hustá v M, pak M_1 je hustá v M.

15.2 Husté podmnožiny v $L^p(\Omega)$. Separabilita Lebesgueových prostorů I

Definice (3 Nosič funkce D 16.4.1)

Nechť (X, ϱ) je metrický prostor a $f\colon X \to \mathbb{R}$ je funkce. *Nosičem funkce f* nazýváme (uzavřenou) množinu

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in D_f \colon f(x) \neq 0\}}.$$

Lemma (4 L 16.4.2)

Nechť (M, ϱ) je metrický prostor a $M_1 \subset M_2 \subset M$. Jestliže M_1 je hustá v M_2 a M_2 hustá v M, pak M_1 je hustá v M.

15.2 Husté podmnožiny v $L^p(\Omega)$. Separabilita Lebesgueových prostorů II

Věta (4 O hustých podmnožinách $L^p(\Omega)$ V 16.4.3)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je měřitelná a $p \in [1, \infty)$. Pak v $L^p(\Omega)$ jsou husté následující množiny:
(i) *množina všech funkcí z $L^p(\Omega)$, které jsou omezené*
(ii) *množina všech funkcí z $L^p(\Omega)$, jejichž nosič je omezenou podmnožinou Ω*
(iii) *množina všech omezených funkcí z $L^p(\Omega)$, jejichž nosič je omezenou podmnožinou Ω*
(iv) *množina všech měřitelných jednoduchých funkcí s omezeným nosičem*
(v) *množina všech měřitelných jednoduchých funkcí s omezeným nosičem, které nabývají jen racionálních hodnot*
(vi) *množina všech měřitelných jednoduchých funkcí s omezeným nosičem, které nabývají jen racionálních hodnot a úrovňové množiny pro nenulové hodnoty jsou po dvou disjunktní otevřené intervaly s racionálními souřadnicemi vrcholů*
(vii) *množina spojitých funkcí s kompaktním nosičem (značí se $C_0(\mathbb{R}^N)$)*
(viii) *je-li Ω navíc otevřená, jsou husté také nekonečněkrát diferencovatelné funkce s kompaktním nosičem obsaženým v Ω (značí se $\mathcal{D}(\Omega)$).*

15.2 Husté podmnožiny v $L^p(\Omega)$. Separabilita Lebesgueových prostorů III

Důsledek (1 Separabilita Lebesgueových prostorů Ds 16.4.4)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je měřitelná a $p \in [1, \infty)$. Pak je $L^p(\Omega)$ separabilní.

15.3 Konvoluční zhlazování a alternativní důkaz separability Lebesgueových prostorů I

Definice (4 Regularizátor D 16.5.1)

Funkce $\omega\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ se nazývá *regularizátor* jestliže splňuje
(i) $\omega \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$
(ii) $\omega \geq 0$ a $\operatorname{supp} \omega = \overline{B}_1(0)$
(iii) ω je radiálně symetrická
(iv) $\int_{B_1(0)} \omega \, \mathrm{d}x = 1$.

Definice (5 Zhlazení funkce D 16.5.4)

Nechť $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, ω je regularizátor na $\mathbb{R}^N$ a $k \in \mathbb{N}$. Pak *zhlazením funkce f* nazýváme funkci

$$f_k(x) := k^N \int_{\mathbb{R}^N} \omega(k(x-y)) f(y) \, \mathrm{d}y.$$

15.3 Konvoluční zhlazování a alternativní důkaz separability Lebesgueových prostorů I

Definice (4 Regularizátor D 16.5.1)

Funkce $\omega\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ se nazývá *regularizátor* jestliže splňuje
(i) $\omega \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$
(ii) $\omega \geq 0$ a $\operatorname{supp} \omega = \overline{B}_1(0)$
(iii) ω je radiálně symetrická
(iv) $\int_{B_1(0)} \omega \, \mathrm{d}x = 1$.

Definice (5 Zhlazení funkce D 16.5.4)

Nechť $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, ω je regularizátor na $\mathbb{R}^N$ a $k \in \mathbb{N}$. Pak *zhlazením funkce f* nazýváme funkci

$$f_k(x) := k^N \int_{\mathbb{R}^N} \omega(k(x-y)) f(y) \, \mathrm{d}y.$$

15.3 Konvoluční zhlazování a alternativní důkaz separability Lebesgueových prostorů II

Věta (5 Spojitost v průměru V 16.6.1)

Nechť $1 \le p < \infty$*,* Ω *je lebesgueovsky měřitelná a* $f \in L^p(\Omega)$*. Potom pro všechna* $\varepsilon > 0$ *existuje* $\delta > 0$ *tak, že pro všechna* $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$*,* $|\mathbf{h}| < \delta$ *je*

$$\int_\Omega |\widetilde{f}(x+\mathbf{h}) - f(x)|^p \, \mathrm{d}x < \varepsilon^p,$$

kde $\widetilde{f}$ *označuje funkci, která je na* Ω *rovna* f *a vně* Ω *je nulová.*

Věta (6 O Lebesgueových bodech V 16.5.13)

Nechť $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$*. Pak skoro všechny body v* $\mathbb{R}^N$ *jsou body Lebesgueovými, tedy pro s.v.* $x \in \mathbb{R}^N$ *platí*

$$\lim_{r \to 0_+} \frac{1}{\lambda_N(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)| \, \mathrm{d}y = 0,$$

tedy též

$$\lim_{r \to 0_+} \frac{1}{\lambda_N(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f(y) \, \mathrm{d}y = f(x).$$

15.3 Konvoluční zhlazování a alternativní důkaz separability Lebesgueových prostorů II

Věta (5 Spojitost v průměru V 16.6.1)

Nechť $1 \le p < \infty$, Ω je lebesgueovsky měřitelná a $f \in L^p(\Omega)$. Potom pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$, $|\mathbf{h}| < \delta$ je

$$\int_\Omega |\widetilde{f}(x + \mathbf{h}) - f(x)|^p \, \mathrm{d}x < \varepsilon^p,$$

kde $\widetilde{f}$ označuje funkci, která je na Ω rovna f a vně Ω je nulová.

Věta (6 O Lebesgueových bodech V 16.5.13)

Nechť $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Pak skoro všechny body v $\mathbb{R}^N$ jsou body Lebesgueovými, tedy pro s.v. $x \in \mathbb{R}^N$ platí

$$\lim_{r \to 0_+} \frac{1}{\lambda_N(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)| \, \mathrm{d}y = 0,$$

tedy též

$$\lim_{r \to 0_+} \frac{1}{\lambda_N(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f(y) \, \mathrm{d}y = f(x).$$

15.2 Konvoluční zhlazování a alternativní důkaz separability Lebesgueových prostorů III

Věta (7 O vlastnostech zhlazení funkce V 16.5.6)

Nechť $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $k \in \mathbb{N}$ a f_k je zhlazení funkce f. Pak
(i) $f_k \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$
(ii) $f_k \to f$ *skoro všude na* $\mathbb{R}^N$
(iii) *jestliže* $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *pro* $p \in [1, \infty]$, *pak* $\|f_k\|_p \leq \|f\|_p$
(iv) *jestliže* $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *pro* $p \in [1, \infty)$, *pak* $f_k \to f$ *v* $L^p(\mathbb{R}^N)$
(v) *jestliže* $f \in C(\Omega)$ *pro* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *otevřenou, pak* $f_k \rightrightarrows f$ *na každém kompaktu* $K \subset \Omega$.

Věta (8 Hustota hladkých funkcí s kompaktním nosičem Pozn. 16.5.16)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *je otevřená. Je-li* $f \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, *potom existuje* $\{f_k\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ *tak, že*

$$f_k \to f \qquad \text{in } L^p(\Omega).$$

15.2 Konvoluční zhlazování a alternativní důkaz separability Lebesgueových prostorů III

Věta (7 O vlastnostech zhlazení funkce V 16.5.6)

Nechť $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $k \in \mathbb{N}$ *a* f_k *je zhlazení funkce* f. *Pak*
(i) $f_k \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$
(ii) $f_k \to f$ *skoro všude na* $\mathbb{R}^N$
(iii) *jestliže* $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *pro* $p \in [1,\infty]$, *pak* $\|f_k\|_p \leq \|f\|_p$
(iv) *jestliže* $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *pro* $p \in [1,\infty)$, *pak* $f_k \to f$ *v* $L^p(\mathbb{R}^N)$
(v) *jestliže* $f \in C(\Omega)$ *pro* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *otevřenou, pak* $f_k \rightrightarrows f$ *na každém kompaktu* $K \subset \Omega$.

Věta (8 Hustota hladkých funkcí s kompaktním nosičem Pozn. 16.5.16)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *je otevřená. Je-li* $f \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, *potom existuje* $\{f_k\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ *tak, že*

$$f_k \to f \qquad \text{in } L^p(\Omega).$$

16 Klasická teorie křivkového a plošného integrálu
16.1 Klasická teorie křivkového integrálu
16.1.1 Křivky v $\mathbb{R}^N$ I

Definice (1 Křivky D 17.1.2)

Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval. *Křivkou třídy* C^1 v $\mathbb{R}^N$ nazýváme zobrazení $\boldsymbol{\varphi} \in C^1(I; \mathbb{R}^N)$ (v případě, že v I leží některý z jeho krajních bodů, jako obvykle v něm uvažujeme jen jednostrannou derivaci, která musí být vlastní). *Křivkou po částech třídy* C^1 v $\mathbb{R}^N$ nazýváme zobrazení $\boldsymbol{\varphi} \colon I \to \mathbb{R}^N$, pro které existuje $n \in \mathbb{N}$ a intervaly $I_1, \dots, I_n$ takové, že $\boldsymbol{\varphi}|_{I_j}$, $j \in \{1, \dots, n\}$, jsou křivky třídy C^1, $I = \bigcup_{j=1}^n I_j$, vnitřky těchto intervalů jsou disjunktní a sousední intervaly obsahují příslušný dělící bod. Je-li $\boldsymbol{\varphi}$ křivkou po částech třídy C^1 v $\mathbb{R}^N$, říkáme, že je *regulární*, jestliže platí

$$\boldsymbol{\varphi}'(t) := (\varphi_1'(t), \varphi_2'(t), \dots, \varphi_N'(t)) \neq \mathbf{0} \qquad \text{na } I$$

(v případě krajních bodů a výše citovaných dělících bodů bereme jen jednostranné derivace).

Množina $\langle \boldsymbol{\varphi} \rangle := \boldsymbol{\varphi}(I)$ se nazývá *geometrický obraz křivky* $\boldsymbol{\varphi}$. Pokud existuje $\boldsymbol{\varphi}'(t)$ (tentokrát už jako oboustranná derivace), pak se tento vektor nazývá *tečný vektor* ke křivce $\boldsymbol{\varphi}$ v bodě $\boldsymbol{\varphi}(t)$ a $\boldsymbol{\tau}(t) := \frac{\boldsymbol{\varphi}'(t)}{|\boldsymbol{\varphi}'(t)|}$ (pokud $\boldsymbol{\varphi}'(t)$ existuje a je netriviální) se nazývá *jednotkový tečný vektor*.

Definice (2 Jednoduchá a uzavřená křivka D 17.1.4)

Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $\varphi \in C(I; \mathbb{R}^N)$ je křivka. Řekneme, že φ je *jednoduchá*, jestliže platí alespoň jedna z podmínek
(i) φ je prostá na I
(ii) $I = [a, b]$ a φ je prostá na $[a, b)$ a na $(a, b]$
a φ^{-1} je spojitá na obrazu intervalu (a, b).
Řekneme, že φ je *uzavřená*, jestliže $I = [a, b]$ a $\varphi(a) = \varphi(b)$. Řekneme, že φ je *Jordanova křivka*, jestliže je jednoduchá a uzavřená.

Definice (3 Součet křivek, křivka opačná D 17.1.7)

Nechť (φ, I) a (ψ, J) jsou křivky v $\mathbb{R}^N$. Nechť $-\infty \leq a_1 \leq b_1 < \infty$, $-\infty < a_2 \leq b_2 \leq \infty$, $I = (a_1, b_1]$, nebo $I = [a_1, b_1]$, $J = [a_2, b_2)$ nebo $J = [a_2, b_2]$ a $\varphi(b_1) = \psi(a_2)$. Pak definujeme *součet křivek* $\varphi \oplus \psi$ předpisem

$$(\varphi \oplus \psi)(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{pro } t \in I \\ \psi(t - b_1 + a_2) & \text{pro } t \in K \setminus I, \end{cases}$$

kde interval K je dán vzorcem $K = I \cup (J - a_2 + b_1)$ (interval J jsme posunuli, aby navazoval na I, tedy $J - a_2 + b_1 = [b_1, b_2 - a_2 + b_1)$ respektive $J - a_2 + b_1 = [b_1, b_2 - a_2 + b_1]$).
Opačnou křivkou ke křivce (φ, I) nazýváme křivku $(\ominus\varphi, -I)$ danou předpisem

$$\ominus\varphi(t) = \varphi(-t) \qquad \text{pro } t \in -I.$$