Matematika pro fyziky I

Milan Pokorný

Přednáška 8.12.2022

Definice (14 Vnější normálový vektor k zobecněné $(N-1)$-ploše D 17.3.2)

Nechť $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je množina, pro niž je $\partial\Omega$ zobecněná $(N-1)$-plocha. Nechť $x \in \partial\Omega$ je bodem nějaké $(N-1)$-dimenzionální komponenty množiny $\partial\Omega$ a $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^N$ je vektor.
Řekneme, že $\boldsymbol{\nu}$ je *normálový vektor* k $\partial\Omega$ v bodě x, jestliže $\boldsymbol{\nu}$ je normálovým vektorem k tečné rovině uvedené komponenty v bodě x.
Jestliže navíc $\|\boldsymbol{\nu}\| = 1$, řekneme, že $\boldsymbol{\nu}$ je *jednotkový normálový vektor*.
Dále řekneme, že $\boldsymbol{\nu}$ je *vnější normálový vektor* k $\partial\Omega$ v bodě x, jestliže $\boldsymbol{\nu}$ je normálový vektor k $\partial\Omega$ v bodě x a existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\{x + t\boldsymbol{\nu} \colon t \in (0, \delta)\} \cap \Omega = \emptyset.$$

Opakování II

Věta (13 Gauss–Ostrogradského věta V 17.3.3)

Nechť $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená otevřená množina, jejíž hranice je zobecněná $(N-1)$-plocha splňující $S_{N-1}(\partial\Omega) < \infty$, a pro kterou v každém bodě x každé její $(N-1)$-dimenzionální komponenty existuje jednotkový vnější normálový vektor $\boldsymbol{\nu}(x)$. Dále nechť $i \in \{1, \dots, N\}$ a $F \in C(\overline{\Omega})$ je taková, že $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ existuje všude v Ω a dá se spojitě rozšířit na $\overline{\Omega}$. Pak

$$\int_\Omega \frac{\partial F}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} F \nu_i \,\mathrm{d}S.$$

16.3.2 Greenova věta I

Věta (14 Jordanova věta V 17.3.18)

Nechť φ *je Jordanova křivka v* $\mathbb{R}^2$. *Pak existují souvislé množiny* $\operatorname{int}\varphi$ *(vnitřek* φ*) a* $\operatorname{Ext}\varphi$ *(vnějšek* φ*) takové, že platí*
(i) $\operatorname{int}\varphi$ *je omezená a* $\operatorname{Ext}\varphi$ *je neomezená*
(ii) $\operatorname{int}\varphi \cup \langle\varphi\rangle \cup \operatorname{Ext}\varphi = \mathbb{R}^2$, *přičemž množiny na levé straně jsou po dvou disjunktní*
(iii) $\partial(\operatorname{int}\varphi) = \partial(\operatorname{Ext}\varphi) = \langle\varphi\rangle$.

16.3.2 Greenova věta II

Věta (15 Greenova věta V 17.3.19)

Nechť $(\varphi; [a,b])$ *je kladně obíhaná regulární Jordanova po částech* C^1*-křivka v* $\mathbb{R}^2$*. Označme* $\Omega := \operatorname{int} \varphi$*.*

(i) *Nechť* $\boldsymbol{T} \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ *je vektorové pole, pro které existují* $\frac{\partial T_1}{\partial x_1}$ *a* $\frac{\partial T_2}{\partial x_2}$ *všude v* Ω *a dají se spojitě rozšířit na* $\overline{\Omega}$*. Pak*

$$\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{T} \, \mathrm{d}x = \int_\varphi (-T_2, T_1) \cdot \mathrm{d}\varphi.$$

(ii) *Nechť* $\boldsymbol{T} \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ *je vektorové pole, pro které existují* $\frac{\partial T_2}{\partial x_1}$ *a* $\frac{\partial T_1}{\partial x_2}$ *všude v* Ω *a dají se spojitě rozšířit na* $\overline{\Omega}$*. Pak*

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial T_2}{\partial x_1} - \frac{\partial T_1}{\partial x_2} \right) \mathrm{d}x = \int_\varphi \boldsymbol{T} \cdot \mathrm{d}\varphi.$$

Pro φ *obíhanou v záporném smyslu platí věta s tím rozdílem, že ve výsledných formulích napravo změníme znaménko.*

Věta (16 Stokesova V 17.3.20)

Za předpokladů uvedených výše platí

$$\int_{\widetilde{M}} \operatorname{rot} \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{\nu} \, \mathrm{d}S = \int_{\boldsymbol{\eta}} \boldsymbol{T} \cdot \, \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}.$$

Definice (15 Jednoduše souvislá množina D 17.3.22)

Oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ se nazývá *jednoduše souvislá*, jestliže pro každou Jordanovu křivku $\varphi\colon [0,1] \to \Omega$ existují $\boldsymbol{H} \in C([0,1]^2; \Omega)$ a $x \in \Omega$ taková, že

$$\boldsymbol{H}(t,0) = \varphi(t) \quad \text{pro všechna } t \in [0,1], \quad \boldsymbol{H}(0,s) = \boldsymbol{H}(1,s) \quad \text{pro všechna } s \in [0,1]$$
$$\text{a} \quad \boldsymbol{H}(t,1) = x \quad \text{pro všechna } t \in [0,1].$$

Věta (17 O existenci potenciálu v $\mathbb{R}^2$ V 17.3.25)

Nechť $\boldsymbol{T} \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je jednoduše souvislá oblast, a

$$\frac{\partial T_1}{\partial x_2} = \frac{\partial T_2}{\partial x_1} \quad \text{na } \Omega.$$

Pak má $\boldsymbol{T}$ v Ω potenciál.

16.3.4 Potenciálnost vektorového pole v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ I

Definice (15 Jednoduše souvislá množina D 17.3.22)

Oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ se nazývá *jednoduše souvislá*, jestliže pro každou Jordanovu křivku $\varphi\colon [0,1] \to \Omega$ existují $\boldsymbol{H} \in C([0,1]^2; \Omega)$ a $x \in \Omega$ taková, že

$$\boldsymbol{H}(t,0) = \varphi(t) \quad \text{pro všechna } t \in [0,1], \quad \boldsymbol{H}(0,s) = \boldsymbol{H}(1,s) \quad \text{pro všechna } s \in [0,1]$$
$$\text{a} \quad \boldsymbol{H}(t,1) = x \quad \text{pro všechna } t \in [0,1].$$

Věta (17 O existenci potenciálu v $\mathbb{R}^2$ V 17.3.25)

Nechť $\boldsymbol{T} \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je jednoduše souvislá oblast, a

$$\frac{\partial T_1}{\partial x_2} = \frac{\partial T_2}{\partial x_1} \quad \textit{na } \Omega.$$

Pak má $\boldsymbol{T}$ v Ω potenciál.

Věta (18 O existenci potenciálu v $\mathbb{R}^3$ pro konvexní množinu V 17.3.26)

Nechť $\boldsymbol{T} \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je konvexní otevřená množina, a

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{T} \equiv \boldsymbol{0} \quad \text{na } \Omega.$$

Pak má $\boldsymbol{T}$ v Ω potenciál.

Definice (16 Plošný integrál 2. druhu Pozn. 17.3.7)

Nechť M je jednoduchá orientovaná plocha a $\mathbf{T}$ je dostatečně hladké (stačí spojité a omezené) vektorové pole na M. Potom plošným integrálem druhého druhu vektorového pole $\mathbf{T}$ přes M nazýváme

$$\int_M \mathbf{T} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} := \int_M (\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\nu} \, \mathrm{d}S.$$

Věta (18 O existenci potenciálu v $\mathbb{R}^3$ pro konvexní množinu V 17.3.26)

Nechť $\boldsymbol{T} \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je konvexní otevřená množina, a

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{T} \equiv \mathbf{0} \quad \textit{na } \Omega.$$

Pak má $\boldsymbol{T}$ v Ω potenciál.

Definice (16 Plošný integrál 2. druhu Pozn. 17.3.7)

Nechť M je jednoduchá orientovaná plocha a $\mathbf{T}$ je dostatečně hladké (stačí spojité a omezené) vektorové pole na M. Potom plošným integrálem druhého druhu vektorového pole $\mathbf{T}$ přes M nazýváme

$$\int_M \mathbf{T} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} := \int_M (\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\nu} \, \mathrm{d}S.$$

Definice (1 Ortogonální systém, ortonormální systém, úplný systém D 19.1.1)

Nechť H je Hilbertův prostor a $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ je systém jeho prvků. Řekneme, že $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *ortogonální systém*, jestliže obsahuje pouze netriviální prvky a platí

$$(\Phi_m, \Phi_n)_H = 0 \qquad \text{kdykoliv } m \neq n.$$

Řekneme, že $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *ortonormální systém*, jestliže je ortogonální a navíc

$$\|\Phi_n\|_H = 1 \qquad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Řekneme, že $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *úplný systém*, jestliže pro každé $\Phi \in H$ platí

$$(\Phi, \Phi_n)_H = 0 \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N} \qquad \Longrightarrow \qquad \Phi = 0.$$

Definice (2 Váhový prostor L^2_ϱ D 19.1.3)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $\varrho \in C(\Omega)$ je kladná na Ω. Pak definujeme *váhový prostor* $L^2_\varrho(\Omega)$ jako množinu tříd ekvivalence (vzhledem k rovnosti skoro všude) na množině

$$\left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ je měřitelná a } \int_\Omega f^2 \varrho \,\mathrm{d}x < \infty \right\}.$$

Dále zde definujeme

$$(f, g)_{L^2_\varrho(\Omega)} := \int_\Omega fg\varrho \,\mathrm{d}x.$$