Matematika pro fyziky II

Milan Pokorný

Přednáška 22.3.2023

Opakování I

Věta (14 Cauchyova věta (druhá verze) V 20.4.5)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast a $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní v Ω. Pak pro každou uzavřenou po částech C^1-křivku φ splňující $\langle \varphi \rangle \subset \Omega$ platí

$$\int_{\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Věta (17 Cauchyův vzorec V 20.5.1)

Nechť Γ je kladně orientovaná Jordanova po částech C^1-křivka v $\mathbb{C}$. Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na $\operatorname{Int}\Gamma$ a spojitá na $\overline{\operatorname{Int}\Gamma}$. Pak pro každé $z_0 \in \operatorname{Int}\Gamma$ platí

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z.$$

Navíc f má v $\operatorname{Int}\Gamma$ derivace všech řádů a pro každé $z_0 \in \operatorname{Int}\Gamma$ a každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\,\mathrm{d}z.$$

Opakování I

Věta (14 Cauchyova věta (druhá verze) V 20.4.5)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast a $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní v Ω. Pak pro každou uzavřenou po částech C^1-křivku φ splňující $\langle \varphi \rangle \subset \Omega$ platí

$$\int_{\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Věta (17 Cauchyův vzorec V 20.5.1)

Nechť Γ je kladně orientovaná Jordanova po částech C^1-křivka v $\mathbb{C}$. Nechť $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na $\operatorname{Int}\Gamma$ a spojitá na $\overline{\operatorname{Int}\Gamma}$. Pak pro každé $z_0 \in \operatorname{Int}\Gamma$ platí

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z.$$

Navíc f má v $\operatorname{Int}\Gamma$ derivace všech řádů a pro každé $z_0 \in \operatorname{Int}\Gamma$ a každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\,\mathrm{d}z.$$

Opakování II

Věta (36 Reziduová věta V 20.8.17)

Nechť Γ *je kladně orientovaná Jordanova po částech* C^1*-křivka,* $k \in \mathbb{N}$ *a* $a_1, a_2, \dots, a_k \in \operatorname{Int}\Gamma$*. Nechť* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je holomorfní na* $\operatorname{Int}\Gamma \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ *a spojitá na* $\overline{\operatorname{Int}\Gamma} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$*. Pak*

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{a_j} f.$$

19.12 Konformní zobrazení, globální Cauchyova věta I

Definice (20 Konformní zobrazení D 20.11.1)

Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a $\Omega \subset \mathbb{C}$. Řekneme, že funkce f je *konformní* na Ω, jestliže je holomorfní na Ω a prostá na Ω.

Věta (44 Riemannova věta V 20.11.2)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast a $\Omega \neq \mathbb{C}$. Pak existuje konformní zobrazení množiny Ω na $B_1(0)$.

19.12 Konformní zobrazení, globální Cauchyova věta I

Definice (20 Konformní zobrazení D 20.11.1)

Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a $\Omega \subset \mathbb{C}$. Řekneme, že funkce f je *konformní* na Ω, jestliže je holomorfní na Ω a prostá na Ω.

Věta (44 Riemannova věta V 20.11.2)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast a $\Omega \neq \mathbb{C}$. Pak existuje konformní zobrazení množiny Ω na $B_1(0)$.

Definice (21 Index bodu vzhledem ke křivce D 20.12.1)

Nechť $a \in \mathbb{C}$, φ je uzavřená po částech C^1-křivka v $\mathbb{C}$ a $a \notin \langle\varphi\rangle$. *Index bodu a vzhledem ke křivce* φ je definován předpisem

$$\operatorname{Ind}_\varphi a := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{z-a}.$$

Věta (45 O vlastnostech indexu bodu vzhledem ke křivce V 20.12.2)

Nechť φ je uzavřená po částech C^1-křivka v $\mathbb{C}$.

(i) *Pro všechna $a \in \mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$ je $\operatorname{Ind}_\varphi a$ definován a roven celému číslu.*

(ii) *Funkce $z \mapsto \operatorname{Ind}_\varphi z$ je konstantní na každé oblasti obsažené v $\mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$.*

(iii) *Existuje neomezená oblast obsažená v $\mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$, na níž je $\operatorname{Ind}_\varphi$ roven nule.*

Definice (21 Index bodu vzhledem ke křivce D 20.12.1)

Nechť $a \in \mathbb{C}$, φ je uzavřená po částech C^1-křivka v $\mathbb{C}$ a $a \notin \langle\varphi\rangle$. *Index bodu a vzhledem ke křivce* φ je definován předpisem

$$\operatorname{Ind}_\varphi a := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{z-a}.$$

Věta (45 O vlastnostech indexu bodu vzhledem ke křivce V 20.12.2)

Nechť φ je uzavřená po částech C^1-křivka v $\mathbb{C}$.

(i) *Pro všechna $a \in \mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$ je $\operatorname{Ind}_\varphi a$ definován a roven celému číslu.*

(ii) *Funkce $z \mapsto \operatorname{Ind}_\varphi z$ je konstantní na každé oblasti obsažené v $\mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$.*

(iii) *Existuje neomezená oblast obsažená v $\mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$, na níž je $\operatorname{Ind}_\varphi$ roven nule.*

Definice (22 Cyklus D 20.12.3)

Nechť $m \in \mathbb{N}$ a $(\varphi_j, [a_j, b_j])$ jsou uzavřené po částech C^1-křivky v $\mathbb{C}$. Pak objekt $\Gamma := (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$ se nazývá *cyklus*. Pro cyklus zavádíme

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \sum_{j=1}^m \int_{\varphi_j} f(z)\,\mathrm{d}z, \qquad \operatorname{Ind}_\Gamma a := \sum_{j=1}^m \operatorname{Ind}_{\varphi_j} a \qquad \text{a} \qquad \langle\Gamma\rangle := \bigcup_{j=1}^m \langle\varphi_j\rangle,$$

mají-li pravé strany definičních vztahů smysl.

19.12 Konformní zobrazení, globální Cauchyova věta IV

Věta (46 Globální Cauchyova a reziduová věta V 20.12.4)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ *je oblast,* $\Gamma = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ *je cyklus takový, že* $\langle \Gamma \rangle \subset \Omega$*, a* $\operatorname{Ind}_\Gamma a = 0$ *pro všechna* $a \notin \Omega$*. Pak*

(i) *(Cauchyova věta) Pro každou funkci* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *holomorfní na* Ω *platí*

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

(ii) *(Cauchyův vzorec) Pro každou funkci* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *holomorfní na* Ω *a každý bod* $w \in \Omega \setminus \langle \Gamma \rangle$ *platí*

$$f(w) \operatorname{Ind}_\Gamma w = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - w}\,\mathrm{d}z.$$

(ii) *(Reziduová věta) Nechť* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je holomorfní na množině* $\Omega \setminus A$*, kde* $A = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \Omega$ *je konečná, a* $A \cap \langle \Gamma \rangle = \emptyset$*. Pak*

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} (\operatorname{Res}_{a_k} f \operatorname{Ind}_\Gamma a_k).$$

20 Fourierova transformace
20.1 Schwartzův prostor I

Definice (1 Schwartzův prostor D 21.1.3)

Nechť $N \in \mathbb{N}$. Pak *Schwartzův prostor* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ je množina všech funkcí $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, které splňují

$$\|f\|_{\alpha,\beta} := \|x^\alpha D^\beta f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < \infty \qquad \text{pro všechna } \alpha, \beta \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N. \tag{1}$$

Definice (2 Konvergence ve Schwartzově prostoru D 21.1.5)

Nechť $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ a $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje k funkci f ve Schwartzově prostoru, jestliže

$$\|f_n - f\|_{\alpha,\beta} \overset{n\to\infty}{\to} 0 \qquad \text{pro všechna } \alpha, \beta \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N.$$

Pak píšeme $f_n \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)}{\to} f$.

20 Fourierova transformace
20.1 Schwartzův prostor I

Definice (1 Schwartzův prostor D 21.1.3)

Nechť $N \in \mathbb{N}$. Pak *Schwartzův prostor* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ je množina všech funkcí $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, které splňují

$$\|f\|_{\alpha,\beta} := \|x^\alpha D^\beta f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < \infty \qquad \text{pro všechna } \alpha, \beta \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N. \tag{1}$$

Definice (2 Konvergence ve Schwartzově prostoru D 21.1.5)

Nechť $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ a $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje k funkci f ve Schwartzově prostoru, jestliže

$$\|f_n - f\|_{\alpha,\beta} \overset{n\to\infty}{\to} 0 \qquad \text{pro všechna } \alpha, \beta \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N.$$

Pak píšeme $f_n \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)}{\to} f$.

20.1 Schwartzův prostor II

Věta (1 O základních vlastnostech Schwartzova prostoru V 21.1.8)

(i) *Schwartzův prostor tvoří algebru vzhledem ke sčítání a násobení funkcí.*
(ii) *Nechť* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ *a* P *je polynom v* $\mathbb{R}^N$. *Pak* $D^\alpha f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *a* $Pf \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.
(iii) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ *pro všechna* $p \in [1, \infty]$.
(iv) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *je hustý v* $L^p(\mathbb{R}^N)$ *pro všechna* $p \in [1, \infty)$.

20.1 Schwartzův prostor II

Definice (3 Konvoluce Text str. 110)

Nechť f, g jsou měřitelné funkce v $\mathbb{R}^N$. Předpokládejme, že

$$(f \star g)(x) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$$

má smysl pro s.v. $x \in \mathbb{R}^N$. Potom výraz výše nazýváme konvolucí funkcí f a g.

Věta (2 O vlastnostech konvoluce V 21.1.9)

(i) *Nechť* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. *Pak* $f \star g = g \star f \in L^1(\mathbb{R}^N)$.
(ii) *Nechť* $f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ *a* $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. *Pak* $f \star g = g \star f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.
(iii) *Nechť* $k \in \mathbb{N}$, $f \in C^k(\mathbb{R}^N)$, $\sup_{|\alpha| \le k, x \in \mathbb{R}^N} |D^\alpha f(x)| < \infty$ *a* $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. *Pak* $f \star g = g \star f \in C^k(\mathbb{R}^N)$.
(iv) *Nechť* $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. *Pak* $f \star g = g \star f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Definice (3 Konvoluce Text str. 110)

Nechť f, g jsou měřitelné funkce v $\mathbb{R}^N$. Předpokládejme, že

$$(f \star g)(x) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$$

má smysl pro s.v. $x \in \mathbb{R}^N$. Potom výraz výše nazýváme konvolucí funkcí f a g.

Věta (2 O vlastnostech konvoluce V 21.1.9)

(i) *Nechť* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. *Pak* $f \star g = g \star f \in L^1(\mathbb{R}^N)$.
(ii) *Nechť* $f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ *a* $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. *Pak* $f \star g = g \star f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.
(iii) *Nechť* $k \in \mathbb{N}$, $f \in C^k(\mathbb{R}^N)$, $\sup_{|\alpha| \le k, x \in \mathbb{R}^N} |D^\alpha f(x)| < \infty$ *a* $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$.
Pak $f \star g = g \star f \in C^k(\mathbb{R}^N)$.
(iv) *Nechť* $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. *Pak* $f \star g = g \star f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.