Matematika pro fyziky II

Milan Pokorný

Přednáška 12.4.2023

20 Opakování I

Definice (1 Hladké funkce s kompaktním nosičem str. 136)

Prostor všech takových nekonečněkrát spojitě diferencovatelných funkcí na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ takových, že jejich nosič je omezený (pro Ω neomezenou) a leží v Ω značíme $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definice (2 Konvergence na $\mathcal{D}(\Omega)$ 23.1.1)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\Omega)$. Jestliže platí
(i) existuje kompakt $K \subset \Omega$ takový, že $\operatorname{supp} \varphi_k \subset K$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$
(ii) $D^\alpha \varphi_k \rightrightarrows 0$ na K pro každý multiindex $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$,
pak píšeme $\varphi_k \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\to} 0$. Dále zavádíme

$$\varphi_k \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\to} \varphi \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \varphi_k - \varphi \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\to} 0.$$

Definice (1 Hladké funkce s kompaktním nosičem str. 136)

Prostor všech takových nekonečněkrát spojitě diferencovatelných funkcí na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ takových, že jejich nosič je omezený (pro Ω neomezenou) a leží v Ω značíme $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definice (2 Konvergence na $\mathcal{D}(\Omega)$ 23.1.1)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\Omega)$. Jestliže platí
(i) existuje kompakt $K \subset \Omega$ takový, že $\operatorname{supp} \varphi_k \subset K$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$
(ii) $D^\alpha \varphi_k \rightrightarrows 0$ na K pro každý multiindex $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$,
pak píšeme $\varphi_k \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\to} 0$. Dále zavádíme

$$\varphi_k \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\to} \varphi \qquad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \qquad \varphi_k - \varphi \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\to} 0.$$

Opakování II

Definice (3 Distribuce D 23.1.3)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina. Symbolem $\mathcal{D}'(\Omega)$ označujeme množinu všech spojitých lineárních funkcionálů nad $\mathcal{D}(\Omega)$, přičemž pro $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ spojitost chápeme ve smyslu

$$\varphi_k \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\to} \varphi \qquad \Longrightarrow \qquad \langle T, \varphi_k \rangle \to \langle T, \varphi \rangle.$$

Prvky množiny $\mathcal{D}'(\Omega)$ nazýváme *distribuce* na Ω.
Pro $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ píšeme $T_1 = T_2$ v $\mathcal{D}'(\Omega)$, jestliže

$$\langle T_1, \varphi \rangle = \langle T_2, \varphi \rangle \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Definice (9 Součin distribuce a hladké funkce 23.4.1)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je distribuce a $a \in C^\infty(\Omega)$. Pak definujeme distribuci aT předpisem

$$\langle aT, \varphi \rangle := \langle T, a\varphi \rangle \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Opakování II

Definice (3 Distribuce D 23.1.3)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina. Symbolem $\mathcal{D}'(\Omega)$ označujeme množinu všech spojitých lineárních funkcionálů nad $\mathcal{D}(\Omega)$, přičemž pro $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ spojitost chápeme ve smyslu

$$\varphi_k \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\to} \varphi \qquad \Longrightarrow \qquad \langle T, \varphi_k \rangle \to \langle T, \varphi \rangle.$$

Prvky množiny $\mathcal{D}'(\Omega)$ nazýváme *distribuce* na Ω.
Pro $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ píšeme $T_1 = T_2$ v $\mathcal{D}'(\Omega)$, jestliže

$$\langle T_1, \varphi \rangle = \langle T_2, \varphi \rangle \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Definice (9 Součin distribuce a hladké funkce 23.4.1)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je distribuce a $a \in C^\infty(\Omega)$. Pak definujeme distribuci aT předpisem

$$\langle aT, \varphi \rangle := \langle T, a\varphi \rangle \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Derivace distribucí I

Definice (10 Derivace distribuce D 23.5.1)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je distribuce a $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ je multiindex. Pak definujeme funkcionál $D^\alpha T$ předpisem

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Tvrzení (1 O korektnosti derivace distribuce T 23.5.2)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je distribuce a $\alpha, \beta \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ jsou multiindexy. Pak funkcionál $D^\alpha T$ zavedený v předchozí definici je distribuce. Dále platí

$$D^\beta(D^\alpha T) = D^\alpha(D^\beta T) = D^{\alpha+\beta} T$$

a zobrazení $T \mapsto D^\alpha T$ je spojité vůči slabé konvergenci na $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Derivace distribucí I

Definice (10 Derivace distribuce D 23.5.1)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je distribuce a $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ je multiindex. Pak definujeme funkcionál $D^\alpha T$ předpisem

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Tvrzení (1 O korektnosti derivace distribuce T 23.5.2)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je distribuce a $\alpha, \beta \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ jsou multiindexy. Pak funkcionál $D^\alpha T$ zavedený v předchozí definici je distribuce. Dále platí

$$D^\beta(D^\alpha T) = D^\alpha(D^\beta T) = D^{\alpha+\beta} T$$

a zobrazení $T \mapsto D^\alpha T$ je spojité vůči slabé konvergenci na $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Derivace distribucí II

Tvrzení (2 Leibnizův vzorec pro distribuce T 23.5.3)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *je otevřená množina,* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *je distribuce,* $a \in C^\infty(\Omega)$ *a* $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ *je multiindex. Pak*

$$D^\alpha(aT) = \sum_{\substack{\beta \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N \\ \beta \leq \alpha}} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta a D^{\alpha-\beta} T,$$

kde nerovnost $\beta \leq \alpha$ *chápeme tak, že platí* $\beta_j \leq \alpha_j$ *pro všechna* $j \in \{1, \dots, N\}$*, a definujeme* $\binom{\alpha}{\beta} := \prod_{j=1}^N \binom{\alpha_j}{\beta_j}$*.*

Derivace distribucí III

Tvrzení (3 O postačujících podmínkách pro koncentraci L 23.5.11)

Nechť $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset C(\mathbb{R})$ *je taková posloupnost, že pro každé* $M > 0$ *existuje* $C > 0$ *splňující*

$$-M \leq a < b \leq M \qquad \Longrightarrow \qquad \left|\int_a^b f_k \,\mathrm{d}x\right| \leq C \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Nechť navíc pro každý omezený interval $(a, b) \subset \mathbb{R}$ *platí*

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k \,\mathrm{d}x = \begin{cases} 1 & \textit{pokud } 0 \in (a, b) \\ 0 & \textit{pokud } 0 \notin [a, b]. \end{cases}$$

Pak $T_{f_k} \rightharpoonup^* \delta_0$.

22.6 Fourierovy řady z pohledu distribucí. Poissonova sumační formule

Věta (6 Poissonova sumační formule V 23.6.3)

Nechť $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. *Potom*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\varphi)(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n).$$