Matematika pro fyziky II

Milan Pokorný

Přednáška 26.4.2023

Definice (1 Prostor $\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)$ D 24.1.1)

Nechť $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pro každé $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ definujme jeho normu

$$\|\varphi\|_{\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)} := \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^N \\ \alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N, |\alpha| \leq p}} (1 + |x|^2)^p |D^\alpha \varphi(x)|.$$

Dále definujme množinu

$$\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N) := \overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)},$$

kde uzávěr bereme v prostoru $C^p(\mathbb{R}^N)$ vzhledem k normě $\varphi \mapsto \|\varphi\|_{\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)}$. Navíc pro $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)$ zavádíme na prostoru $\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)$ konvergenci

$$\varphi_k \overset{\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)}{\to} 0 \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \|\varphi_k\|_{\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)} \to 0$$

a

$$\varphi_k \overset{\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)}{\to} \varphi \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \varphi_k - \varphi \overset{\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)}{\to} 0.$$

Opakování II

Tvrzení (1 O charakterizaci prostorů $\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)$ T 24.1.3)

Pro každé $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí

$$\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N) = \{\varphi \in C^p(\mathbb{R}^N)\colon (1+|x|^2)^p D^\alpha \varphi(x) \overset{|x|\to\infty}{\to} 0 \text{ kdykoliv } |\alpha| \le p\}.$$

Dále platí

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) = \bigcap_{p \in \mathbb{N}\cup\{0\}} \mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N).$$

Definice (2 Třída pomalu rostoucích funkcí D 24.1.4)

Množinu Θ_M definujeme jako množinu všech funkcí $a \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ takových, že pro každé $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ existují $m_\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $c_\alpha > 0$ takové, že

$$|D^\alpha a(x)| \le c_\alpha (1+|x|^2)^{m_\alpha}.$$

Lemma (1 L 24.1.5)

Nechť $a \in \Theta_M$. Pak operace $\varphi \mapsto a\varphi$ spojitě zobrazuje $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ do $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Opakování II

Tvrzení (1 O charakterizaci prostorů $\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)$ T 24.1.3)

Pro každé $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí

$$\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N) = \{\varphi \in C^p(\mathbb{R}^N) \colon (1 + |x|^2)^p D^\alpha \varphi(x) \overset{|x|\to\infty}{\to} 0 \text{ kdykoliv } |\alpha| \leq p\}.$$

Dále platí

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) = \bigcap_{p \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N).$$

Definice (2 Třída pomalu rostoucích funkcí D 24.1.4)

Množinu Θ_M definujeme jako množinu všech funkcí $a \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ takových, že pro každé $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ existují $m_\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $c_\alpha > 0$ takové, že

$$|D^\alpha a(x)| \leq c_\alpha (1 + |x|^2)^{m_\alpha}.$$

Lemma (1 L 24.1.5)

Nechť $a \in \Theta_M$. Pak operace $\varphi \mapsto a\varphi$ spojitě zobrazuje $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ do $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Opakování II

Tvrzení (1 O charakterizaci prostorů $\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)$ T 24.1.3)

Pro každé $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí

$$\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N) = \{\varphi \in C^p(\mathbb{R}^N) \colon (1 + |x|^2)^p D^\alpha \varphi(x) \overset{|x| \to \infty}{\to} 0 \textit{ kdykoliv } |\alpha| \leq p\}.$$

Dále platí

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) = \bigcap_{p \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N).$$

Definice (2 Třída pomalu rostoucích funkcí D 24.1.4)

Množinu Θ_M definujeme jako množinu všech funkcí $a \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ takových, že pro každé $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ existují $m_\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $c_\alpha > 0$ takové, že

$$|D^\alpha a(x)| \leq c_\alpha (1 + |x|^2)^{m_\alpha}.$$

Lemma (1 L 24.1.5)

Nechť $a \in \Theta_M$. Pak operace $\varphi \mapsto a\varphi$ spojitě zobrazuje $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ do $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Opakování III

Definice (3 Temperované distribuce D 24.1.6)

Prostorem *temperovaných distribucí* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ nazýváme množinu všech spojitých lineárních funkcionálů nad $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, kde spojitost funkcionálu T chápeme tak, že $\varphi_k \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)}{\to} 0$ implikuje $\langle T, \varphi_k \rangle \to 0$. Dále definujeme

$$T_k \rightharpoonup^* T \text{ v } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \qquad \overset{\text{def}}{\iff} \qquad \langle T_k, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle \quad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Analogicky pro všechna $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zavádíme $(\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N))'$ (často se též značí $\mathcal{S}^{-p}(\mathbb{R}^N)$) jako množinu spojitých lineárních funkcionálů nad $\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)$. Navíc pro tyto funkcionály zavádíme

$$||T||_{\mathcal{S}^{-p}(\mathbb{R}^N)} := \sup_{\varphi \in \mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N), \|\varphi\|_{\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)} \leq 1} |\langle T, \varphi \rangle|.$$

Lemma (2 L 24.1.8)

Nechť $\{T_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ a platí

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} |\langle T_k, \varphi \rangle| < \infty \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Jestliže $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ a $\varphi_k \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)}{\to} 0$, pak

Opakování III

Definice (3 Temperované distribuce D 24.1.6)

Prostorem *temperovaných distribucí* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ nazýváme množinu všech spojitých lineárních funkcionálů nad $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, kde spojitost funkcionálu T chápeme tak, že $\varphi_k \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)}{\to} 0$ implikuje $\langle T, \varphi_k\rangle \to 0$. Dále definujeme

$$T_k \rightharpoonup^* T \text{ v } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \qquad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \qquad \langle T_k, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle \quad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Analogicky pro všechna $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zavádíme $(\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N))'$ (často se též značí $\mathcal{S}^{-p}(\mathbb{R}^N)$) jako množinu spojitých lineárních funkcionálů nad $\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)$. Navíc pro tyto funkcionály zavádíme

$$||T||_{\mathcal{S}^{-p}(\mathbb{R}^N)} := \sup_{\varphi \in \mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N), \|\varphi\|_{\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)} \leq 1} |\langle T, \varphi\rangle|.$$

Lemma (2 L 24.1.8)

Nechť $\{T_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *a platí*

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} |\langle T_k, \varphi\rangle| < \infty \qquad \textit{pro všechna } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Jestliže $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *a* $\varphi_k \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)}{\to} 0$, *pak*

Opakování IV

Věta (1 O charakterizaci slabé* konvergence temperovaných distribucí V 24.1.9)

Nechť $\{T_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *je taková posloupnost, že pro každé* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *má číselná posloupnost* $\{\langle T_k, \varphi\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ *vlastní limitu pro* $k \to \infty$*. Pak funkcionál* T *definovaný předpisem*

$$\langle T, \varphi\rangle := \lim_{k\to\infty} \langle T_k, \varphi\rangle \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

splňuje $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *a* $T_k \rightharpoonup^* T$ *v* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.

Věta (2 O omezené posloupnosti temperovaných distribucí V 24.1.10)

Nechť posloupnost temperovaných distribucí $\{T_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *splňuje*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |\langle T_k, \varphi\rangle| < \infty \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Pak existují $C > 0$ *a* $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *taková, že*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |\langle T_k, \varphi\rangle| \le C\|\varphi\|_{\mathcal{S}^m(\mathbb{R}^N)} \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Opakování IV

Věta (1 O charakterizaci slabé* konvergence temperovaných distribucí V 24.1.9)

Nechť $\{T_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *je taková posloupnost, že pro každé* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *má číselná posloupnost* $\{\langle T_k, \varphi\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ *vlastní limitu pro* $k \to \infty$*. Pak funkcionál* T *definovaný předpisem*

$$\langle T, \varphi\rangle := \lim_{k\to\infty} \langle T_k, \varphi\rangle \qquad \textit{pro všechna } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

splňuje $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *a* $T_k \rightharpoonup^* T$ *v* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.

Věta (2 O omezené posloupnosti temperovaných distribucí V 24.1.10)

Nechť posloupnost temperovaných distribucí $\{T_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *splňuje*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |\langle T_k, \varphi\rangle| < \infty \qquad \textit{pro všechna } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Pak existují $C > 0$ *a* $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *taková, že*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |\langle T_k, \varphi\rangle| \le C\|\varphi\|_{\mathcal{S}^m(\mathbb{R}^N)} \qquad \textit{pro všechna } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Důsledek (1 Důsl. 24.1.11)

Pro každou temperovanou distribuci $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ existují $C > 0$ a $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ taková, že

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{\mathcal{S}^m(\mathbb{R}^N)} \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Navíc lze v takovém případě uvedenou distribuci prodloužit na prvek $\mathcal{S}^{-m}(\mathbb{R}^N)$.

Důsledek (2 Důsl. 24.1.13)

Nechť $\{T_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ je posloupnost temperovaných distribucí taková, že $T_k \rightharpoonup^* T$ v $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ pro jisté $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Pak existuje $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takové, že distribuce $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$ a T je možné rozšířit na prvky $\mathcal{S}^{-m}(\mathbb{R}^N)$ a pro rozšířené distribuce platí

$$T_k \rightharpoonup^* T \qquad \text{v } \mathcal{S}^{-m}(\mathbb{R}^N).$$

Opakování V

Důsledek (1 Důsl. 24.1.11)

Pro každou temperovanou distribuci $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ existují $C > 0$ a $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ taková, že

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{\mathcal{S}^m(\mathbb{R}^N)} \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Navíc lze v takovém případě uvedenou distribuci prodloužit na prvek $\mathcal{S}^{-m}(\mathbb{R}^N)$.

Důsledek (2 Důsl. 24.1.13)

Nechť $\{T_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ je posloupnost temperovaných distribucí taková, že $T_k \rightharpoonup^* T$ v $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ pro jisté $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Pak existuje $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takové, že distribuce $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$ a T je možné rozšířit na prvky $\mathcal{S}^{-m}(\mathbb{R}^N)$ a pro rozšířené distribuce platí

$$T_k \rightharpoonup^* T \qquad \text{v } \mathcal{S}^{-m}(\mathbb{R}^N).$$

Definice (4 Operace s temperovanými distribucemi D 24.1.15)

Nechť $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Pro libovolné $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ definujeme $D^\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ předpisem

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Je-li $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ regulární matice a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$ vektor, pak definujeme

$$\langle T(\mathbb{A}y + \mathbf{b}), \varphi \rangle := \left\langle T, \frac{\varphi(\mathbb{A}^{-1}(x - \mathbf{b}))}{|\det \mathbb{A}|} \right\rangle \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Jestliže $a \in \Theta_M$, pak definujeme $aT \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ předpisem

$$\langle aT, \varphi \rangle := \langle T, a\varphi \rangle \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Definice (5 Fourierova transformace temperovaných distribucí D 24.2.1)

Nechť $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Pak temperované distribuce $\mathcal{F}(T)$ a $\mathcal{F}^{-1}(T)$ zavádíme pomocí předpisů

$$\langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle := \langle T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

a

$$\langle \mathcal{F}^{-1}(T), \varphi \rangle := \langle T, \mathcal{F}^{-1}(\varphi) \rangle \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Věta (3 O spojitosti Fourierovy transformace V 24.2.3)

Fourierova transformace a inverzní Fourierova transformace jsou spojitá zobrazení z $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ na $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, která jsou vzájemně inverzní.

Věta (4 O vztahu Fourierovy transformace a distributivní derivace V 24.2.7)

Nechť $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ a $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$. Pak

$$D^\alpha \mathcal{F}(T) = \mathcal{F}((-i2\pi x)^\alpha T) \qquad a \qquad \mathcal{F}(D^\alpha T) = (i2\pi\xi)^\alpha \mathcal{F}(T).$$

23.2 Fourierova transformace temperovaných distribucí I

Definice (5 Fourierova transformace temperovaných distribucí D 24.2.1)

Nechť $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Pak temperované distribuce $\mathcal{F}(T)$ a $\mathcal{F}^{-1}(T)$ zavádíme pomocí předpisů

$$\langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle := \langle T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

a

$$\langle \mathcal{F}^{-1}(T), \varphi \rangle := \langle T, \mathcal{F}^{-1}(\varphi) \rangle \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Věta (3 O spojitosti Fourierovy transformace V 24.2.3)

Fourierova transformace a inverzní Fourierova transformace jsou spojitá zobrazení z $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ na $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, která jsou vzájemně inverzní.

Věta (4 O vztahu Fourierovy transformace a distributivní derivace V 24.2.7)

Nechť $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ a $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$. Pak

$$D^\alpha \mathcal{F}(T) = \mathcal{F}((-\mathrm{i}2\pi x)^\alpha T) \qquad \text{a} \qquad \mathcal{F}(D^\alpha T) = (\mathrm{i}2\pi\xi)^\alpha \mathcal{F}(T).$$

23.2 Fourierova transformace temperovaných distribucí I

Definice (5 Fourierova transformace temperovaných distribucí D 24.2.1)

Nechť $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Pak temperované distribuce $\mathcal{F}(T)$ a $\mathcal{F}^{-1}(T)$ zavádíme pomocí předpisů

$$\langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle := \langle T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

a

$$\langle \mathcal{F}^{-1}(T), \varphi \rangle := \langle T, \mathcal{F}^{-1}(\varphi) \rangle \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Věta (3 O spojitosti Fourierovy transformace V 24.2.3)

Fourierova transformace a inverzní Fourierova transformace jsou spojitá zobrazení z $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ na $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, která jsou vzájemně inverzní.

Věta (4 O vztahu Fourierovy transformace a distributivní derivace V 24.2.7)

Nechť $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ a $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$. Pak

$$D^\alpha \mathcal{F}(T) = \mathcal{F}((-\mathrm{i}2\pi x)^\alpha T) \qquad \text{a} \qquad \mathcal{F}(D^\alpha T) = (\mathrm{i}2\pi\xi)^\alpha \mathcal{F}(T).$$

Definice (6 Tenzorový součin distribucí D 24.3.1)

Nechť $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^N$ a $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^M$ jsou otevřené množiny, $T \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ a $G \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$. Pak definujeme *tenzorový součin distribucí* T a G předpisy

$$\langle T(x) \otimes G(y), \varphi(x,y) \rangle := \langle T(x), \langle G(y), \varphi(x,y) \rangle \rangle$$

a

$$\langle G(y) \otimes T(x), \varphi(x,y) \rangle := \langle G(y), \langle T(x), \varphi(x,y) \rangle \rangle$$

pro všechna $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Lemma (3 L 24.3.2)

Nechť $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^N$ *a* $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^M$ *jsou otevřené množiny,* $\Omega' \subset\subset \Omega_1 \times \Omega_2$ *je otevřená množina a* $G \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$*. Pak existují otevřená množina* $\widetilde{\Omega}_1 \subset\subset \Omega_1$ *a čísla* $C > 0$*,* $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *s následující vlastností:*
jestliže $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega')$ *a* $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$*, pak funkce* ψ*:* $x \mapsto \langle G(y), \varphi(x, y)\rangle$ *splňuje*

$$\psi \in \mathcal{D}(\widetilde{\Omega}_1),$$

$$D^\alpha \psi(x) = \langle G(y), D_x^\alpha \varphi(x, y)\rangle \qquad \text{pro všechna } x \in \widetilde{\Omega}_1$$

a

$$|D^\alpha \psi(x)| \le C \max_{\substack{(s,y)\in\overline{\Omega'} \\ \beta\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^M \\ |\beta|\le m}} |D_x^\alpha D_y^\beta \varphi(s, y)| \qquad \text{pro všechna } x \in \widetilde{\Omega}_1.$$

Navíc je operace $\varphi(x, y) \mapsto \psi(x)$ *lineární a spojitá z* $\mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ *do* $\mathcal{D}(\Omega_1)$*.*

Lemma (4 L 24.3.3)

Nechť $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$, kde $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^N$ a $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^M$ jsou otevřené množiny. Potom existuje posloupnost $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ taková, že

$$\varphi_k(x, y) = \sum_{i=1}^{n_k} u_k^i(x) v_k^i(y) \qquad \text{pro všechna } k \in \mathbb{N},$$

kde $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ a pro každé $k \in \mathbb{N}$ a $i \in \{1, \dots, n_k\}$ platí $u_k^i \in \mathcal{D}(\Omega_1)$, $v_k^i \in \mathcal{D}(\Omega_2)$, a

$$\varphi_k \to \varphi \qquad \text{v } \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2).$$

Věta (5 O vlastnostech tenzorového součinu distribucí V 24.3.4)

Nechť $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^N$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^M$ a $\Omega_3 \subset \mathbb{R}^L$ jsou otevřené množiny a $T \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$, $G \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$ a $H \in \mathcal{D}'(\Omega_3)$. Pak
(i) $T \otimes G = G \otimes T$ *(tenzorový součin je komutativní)*
(ii) $(T \otimes G) \otimes H = T \otimes (G \otimes H)$ *(tenzorový součin je asociativní)*
(iii) $\operatorname{supp}(T \otimes G) = \operatorname{supp} T \times \operatorname{supp} G$.

Lemma (4 L 24.3.3)

Nechť $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$, *kde* $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^N$ *a* $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^M$ *jsou otevřené množiny.*
Potom existuje posloupnost $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ *taková, že*

$$\varphi_k(x,y) = \sum_{i=1}^{n_k} u_k^i(x) v_k^i(y) \qquad \text{pro všechna } k \in \mathbb{N},$$

kde $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ *a pro každé* $k \in \mathbb{N}$ *a* $i \in \{1, \ldots, n_k\}$ *platí* $u_k^i \in \mathcal{D}(\Omega_1)$, $v_k^i \in \mathcal{D}(\Omega_2)$, *a*

$$\varphi_k \to \varphi \qquad \text{v } \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2).$$

Věta (5 O vlastnostech tenzorového součinu distribucí V 24.3.4)

Nechť $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^N$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^M$ *a* $\Omega_3 \subset \mathbb{R}^L$ *jsou otevřené množiny a* $T \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$, $G \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$ *a* $H \in \mathcal{D}'(\Omega_3)$. *Pak*
(i) $T \otimes G = G \otimes T$ *(tenzorový součin je komutativní)*
(ii) $(T \otimes G) \otimes H = T \otimes (G \otimes H)$ *(tenzorový součin je asociativní)*
(iii) $\operatorname{supp}(T \otimes G) = \operatorname{supp} T \times \operatorname{supp} G$.