# Matematika pro fyziky II

Milan Pokorný

Přednáška 22.5.2023

# Opakování I

## Definice (11 Prostory $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ a $\mathcal{Z}$ D 24.5.1)

(i) Symbolem $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ značíme množinu všech funkcí $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ takových, že $\operatorname{Re} F, \operatorname{Im} F \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
(ii) Symbolem $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ značíme množinu všech funkcí $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ takových, že platí $\operatorname{Re} F, \operatorname{Im} F \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
(iii) Značí-li $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ množinu všech holomorfních funkcí na $\mathbb{C}$, pak zavádíme množinu $\mathcal{Z} \subset \mathcal{H}(\mathbb{C})$ jako množinu funkcí $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, pro které existuje $a > 0$ s následující vlastností: pro každá $q, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ existuje $c > 0$ takové, že

$$(1 + |p|)^q |F^{(l)}(p)| \leq c\mathrm{e}^{a|\operatorname{Im} p|} \qquad \text{pro všechna } p \in \mathbb{C}.$$

## Věta (15 Paley–Wienerova věta V 24.5.4)

*Pro každou funkci $F \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ definujme funkci $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}(F)\colon p \in \mathbb{C} \mapsto \mathcal{F}_{\mathbb{C}}(F)(p)$ předpisem*

$$\mathcal{F}_{\mathbb{C}}(F)(p) := \int_{\mathbb{R}} F(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi px}\,\mathrm{d}x.$$

*Pak zobrazení $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ zobrazuje množinu $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ prostě na množinu $\mathcal{Z}$.*

# Opakování I

## Definice (11 Prostory $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ a $\mathcal{Z}$ D 24.5.1)

(i) Symbolem $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ značíme množinu všech funkcí $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ takových, že $\operatorname{Re} F, \operatorname{Im} F \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
(ii) Symbolem $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ značíme množinu všech funkcí $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ takových, že platí $\operatorname{Re} F, \operatorname{Im} F \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
(iii) Značí-li $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ množinu všech holomorfních funkcí na $\mathbb{C}$, pak zavádíme množinu $\mathcal{Z} \subset \mathcal{H}(\mathbb{C})$ jako množinu funkcí $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, pro které existuje $a > 0$ s následující vlastností: pro každá $q, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ existuje $c > 0$ takové, že

$$(1 + |p|)^q |F^{(l)}(p)| \leq c\mathrm{e}^{a|\operatorname{Im} p|} \qquad \text{pro všechna } p \in \mathbb{C}.$$

## Věta (15 Paley–Wienerova věta V 24.5.4)

*Pro každou funkci $F \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ definujme funkci $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}(F)\colon p \in \mathbb{C} \mapsto \mathcal{F}_{\mathbb{C}}(F)(p)$ předpisem*

$$\mathcal{F}_{\mathbb{C}}(F)(p) := \int_{\mathbb{R}} F(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi px}\,\mathrm{d}x.$$

*Pak zobrazení $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ zobrazuje množinu $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ prostě na množinu $\mathcal{Z}$.*

**Důsledek (3 Důsl. 24.5.6)**

*Zobrazení $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}^{-1}$ definované v poznámce uvedené výše zobrazuje prostor $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ prostě na prostor $\mathcal{Z}$ a zobrazení $\mathcal{F}$ definované tamtéž, chápáno jako zobrazení $\mathcal{Z} \to \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, je k němu inverzní.*

**Definice (12 Konvergence na $\mathcal{Z}$ D 24.5.7)**

Nechť $\{G_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{Z}$ a $G \in \mathcal{Z}$. Píšeme $G_k \to G$ v $\mathcal{Z}$, jestliže

$$\mathcal{F}_{\mathbb{C}}^{-1}(G_k) \to \mathcal{F}_{\mathbb{C}}^{-1}(G) \qquad \text{v } \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}).$$

### Důsledek (3 Důsl. 24.5.6)

*Zobrazení $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}^{-1}$ definované v poznámce uvedené výše zobrazuje prostor $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ prostě na prostor $\mathcal{Z}$ a zobrazení $\mathcal{F}$ definované tamtéž, chápáno jako zobrazení $\mathcal{Z} \to \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, je k němu inverzní.*

### Definice (12 Konvergence na $\mathcal{Z}$ D 24.5.7)

Nechť $\{G_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{Z}$ a $G \in \mathcal{Z}$. Píšeme $G_k \to G$ v $\mathcal{Z}$, jestliže

$$\mathcal{F}_{\mathbb{C}}^{-1}(G_k) \to \mathcal{F}_{\mathbb{C}}^{-1}(G) \qquad \text{v } \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}).$$

# 23.6 Fourierova transformace na prostorech $\mathcal{Z}'$ a $\mathcal{D}'_{\mathbb{C}}$ I

**Definice (13 Prostor $\mathcal{Z}'$ D 24.6.1)**

Prostor $\mathcal{Z}'$ definujeme jako prostor všech spojitých funkcionálů nad $\mathcal{Z}$ (vzhledem k výše zavedené konvergenci na $\mathcal{Z}$).

**Definice (14 Fourierova transformace nad $\mathcal{Z}'$ a $\mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ D 24.6.2)**

Fourierovu transformaci funkcionálu $T \in \mathcal{Z}'$ definujeme předpisem

$$\langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle := \langle T, \mathcal{F}_{\mathbb{C}}(\varphi) \rangle \qquad \text{pro každé } \varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}).$$

Fourierovu transformaci funkcionálu $T \in \mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ definujeme předpisem

$$\langle \mathcal{F}_{\mathbb{C}}(T), \varphi \rangle := \langle T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle \qquad \text{pro každé } \varphi \in \mathcal{Z}.$$

# 23.6 Fourierova transformace na prostorech $\mathcal{Z}'$ a $\mathcal{D}'_{\mathbb{C}}$ I

## Definice (13 Prostor $\mathcal{Z}'$ D 24.6.1)

Prostor $\mathcal{Z}'$ definujeme jako prostor všech spojitých funkcionálů nad $\mathcal{Z}$ (vzhledem k výše zavedené konvergenci na $\mathcal{Z}$).

## Definice (14 Fourierova transformace nad $\mathcal{Z}'$ a $\mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ D 24.6.2)

Fourierovu transformaci funkcionálu $T \in \mathcal{Z}'$ definujeme předpisem

$$\langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle := \langle T, \mathcal{F}_{\mathbb{C}}(\varphi) \rangle \qquad \text{pro každé } \varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}).$$

Fourierovu transformaci funkcionálu $T \in \mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ definujeme předpisem

$$\langle \mathcal{F}_{\mathbb{C}}(T), \varphi \rangle := \langle T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle \qquad \text{pro každé } \varphi \in \mathcal{Z}.$$

# 23.7 Fourierovy obrazy radiálně symetrických funkcí a distribucí I

## Věta (16 O prodloužení distribucí $H_{|x|^\lambda}$ V 24.7.1)

*Regulární distribuce $H_{|x|^\lambda}$ je z množiny $\{\lambda \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re}\lambda > -N\}$ možné holomorfně prodloužit na $\mathbb{C} \setminus \{-N, -N-2, -N-4, \dots\}$ využitím rovnosti pro Laplaceův operátor*

$$|x|^\lambda = \frac{\Delta(|x|^{\lambda+2})}{(\lambda+2)(\lambda+N)}.$$

*Pro rozšířenou distribuci a pro všechna $k \in \mathbb{N}$ pak platí*

$$\operatorname{Res}_{\lambda=-N-2k} H_{|x|^\lambda} = \frac{\kappa_N \Delta^k(\delta_0)}{2^k k! N(N+2)\dots(N+2k-2)}$$

*a*

$$\widetilde{\varphi}^{(2k)}(0) = \frac{(2k)!\kappa_N \Delta^k \varphi(0)}{2^k k! N(N+2)\dots(N+2k-2)}.$$

## Definice (16 Plošná míra D 24.7.2)

Distribuce $\nu_r \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, kde $r > 0$, definovaná předpisem

$$\langle \nu_r, \varphi \rangle := \int_{\partial B_1(0)} r^{N-1} \varphi(rv)\, \mathrm{d}S(v) = \int_{\partial B_r(0)} \varphi(w)\, \mathrm{d}S(w)$$

pro všechna $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ se nazývá *plošná míra*.

## 23.7 Fourierovy obrazy radiálně symetrických funkcí a distribucí I

### Věta (16 O prodloužení distribucí $H_{|x|^\lambda}$ V 24.7.1)

*Regulární distribuce $H_{|x|^\lambda}$ je z množiny $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > -N\}$ možné holomorfně prodloužit na $\mathbb{C} \setminus \{-N, -N-2, -N-4, \dots\}$ využitím rovnosti pro Laplaceův operátor*

$$|x|^\lambda = \frac{\Delta(|x|^{\lambda+2})}{(\lambda+2)(\lambda+N)}.$$

*Pro rozšířenou distribuci a pro všechna $k \in \mathbb{N}$ pak platí*

$$\operatorname{Res}_{\lambda=-N-2k} H_{|x|^\lambda} = \frac{\kappa_N \Delta^k(\delta_0)}{2^k k! N(N+2)\dots(N+2k-2)}$$

*a*

$$\widetilde{\varphi}^{(2k)}(0) = \frac{(2k)!\kappa_N \Delta^k \varphi(0)}{2^k k! N(N+2)\dots(N+2k-2)}.$$

### Definice (16 Plošná míra D 24.7.2)

Distribuce $\nu_r \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, kde $r > 0$, definovaná předpisem

$$\langle \nu_r, \varphi \rangle := \int_{\partial B_1(0)} r^{N-1} \varphi(rv)\, \mathrm{d}S(v) = \int_{\partial B_r(0)} \varphi(w)\, \mathrm{d}S(w)$$

pro všechna $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ se nazývá *plošná míra*.

# 23.7 Fourierovy obrazy radiálně symetrických funkcí a distribucí II

## Definice (17 Besselovy funkce D 24.7.4)

Nechť $s \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, \dots\}$. Pak *Besselovu funkci* prvního druhu řádu $s$ definujeme předpisem

$$J_s(x) := \left(\frac{x}{2}\right)^s \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+1+s)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \qquad \text{na } \mathbb{R}.$$

Pro $s \in \{-1, -2, \dots\}$ dále definujeme

$$J_s(x) := \left(\frac{x}{2}\right)^s \sum_{k=-s}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+1+s)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \qquad \text{na } \mathbb{R}.$$

## Věta (17 O asymptotice Besselových funkcí V 24.7.6)

*Nechť $s \in \mathbb{R}$. Pak*

$$J_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{(2s+1)\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$$

*pro $|x| \to \infty$.*

## 23.7 Fourierovy obrazy radiálně symetrických funkcí a distribucí II

### Definice (17 Besselovy funkce D 24.7.4)

Nechť $s \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, \dots\}$. Pak *Besselovu funkci* prvního druhu řádu $s$ definujeme předpisem

$$J_s(x) := \left(\frac{x}{2}\right)^s \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+1+s)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \qquad \text{na } \mathbb{R}.$$

Pro $s \in \{-1, -2, \dots\}$ dále definujeme

$$J_s(x) := \left(\frac{x}{2}\right)^s \sum_{k=-s}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+1+s)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \qquad \text{na } \mathbb{R}.$$

### Věta (17 O asymptotice Besselových funkcí V 24.7.6)

*Nechť $s \in \mathbb{R}$. Pak*

$$J_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{(2s+1)\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$$

*pro $|x| \to \infty$.*

# 23.7 Fourierovy obrazy radiálně symetrických funkcí a distribucí III

Věta (18 O Fourierově transformaci plošné míry V 24.7.7)

*Nechť $N \geq 2$ a $r > 0$. Pak $\mathcal{F}(\nu_r) = T_g$, kde*

$$g(\xi) = 2\pi r \left(\frac{r}{|\xi|}\right)^{\frac{N}{2}-1} J_{\frac{N}{2}-1}(2\pi r|\xi|) \qquad \textit{pro } \xi \in \mathbb{R}^N.$$

*Speciálně pro $N = 3$ platí*

$$g(\xi) = \frac{2r}{|\xi|} \sin(2\pi r|\xi|).$$

# 23.7 Fourierovy obrazy radiálně symetrických funkcí a distribucí IV

**Věta (19 O Fourierově transformaci radiálně symetrické funkce V 24.7.8)**

*Nechť $F \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ je radiálně symetrická funkce, $T_F$ je temperovaná distribuce a funkce $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ je definovaná předpisem*

$$F(x) = f(|x|) \qquad \textit{pro všechna } x \in \mathbb{R}^N.$$

*Jestliže existují $C > 0$ a $K > 0$ taková, že*

$$h_R(\xi) := \int_0^R 2\pi f(r) r \left(\frac{r}{|\xi|}\right)^{\frac{N}{2}-1} J_{\frac{N}{2}-1}(2\pi r|\xi|)\,\mathrm{d}r$$

*splňuje*

$$|h_R(\xi)| \le C(|\xi|^K + |\xi|^{\frac{1}{K}-N}) \qquad \textit{pro všechna } \xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \textit{ a } R > 0$$

*a pro všechna $\xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ existuje*

$$h(\xi) := \lim_{R\to\infty} h_R(\xi),$$

*pak $\mathcal{F}(T_F)$ je regulární temperovaná distribuce reprezentovaná funkcí $h$.*