

Početní část zkoušky 29.6.2023

Jméno:

Skupina:

1. (10b) Nalezněte rozvoj funkce

$$f(x) = x \sin x$$

do trigonometrické řady na $(-\pi, \pi)$. Vyšetřete bodovou, lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci této řady na $[-\pi, \pi]$ resp. na $(-\pi, \pi)$.

2. (17b) Pomocí reziduové věty spočtěte

$$\int_0^1 \frac{x^{\frac{1}{2}}}{(1+x^2)(1-x)^{\frac{1}{2}}} dx.$$

3. (14b) Nalezněte $Y \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ řešení rovnice

$$Y \star T_{e^{-\alpha|x|}} = T_{e^{-\beta|x|}}$$

pro jistá $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$. Na závěr ověřte, že daná konvoluce je dobře definovaná.

4. (9b) Nalezněte slabou* limitu posloupnosti temperovaných distribucí

$$T_k := T_{\frac{-2k^3x}{\pi(k^2x^2+1)^2}}$$

pro $k \rightarrow \infty$. Spočtěte

$$\langle \lim_{k \rightarrow \infty} T_k, \varphi \rangle$$

pro $\varphi(x) = xe^{-x^2}$.

Návod: Všimněte si, že

$$\frac{d}{dx} \frac{k}{\pi(k^2x^2+1)} = \frac{-2k^3x}{\pi(k^2x^2+1)^2}$$

a využijte vhodnou větu na toto téma. Uvědomte si, že věta platí i pro temperované distribuce. Pečlivě ověřte splnění jejich předpokladů.