Otázky ke zkoušce NOFY163 šk. rok 2023/24

1. Vysvětlete pojem fundamentálního řešení rovnice vedení tepla. Ukažte odvození jeho Fourierovy transformace a vysvětlete, jak spočtete Fourierovu inverzi.

2. Použitím fundamentálního řešení rovnice vedení tepla formulujte a dokažte větu o řešení Cauchyovy úlohy pro rovnici vedení tepla (pro nulovou pravou stranu) v klasickém smyslu a ve smyslu distribucí.

3. Použitím fundamentálního řešení rovnice vedení tepla formulujte a dokažte větu o řešení Cauchyovy úlohy pro rovnici vedení tepla (pro nulovou počáteční podmínku a nenulovou pravou stranu) v klasickém smyslu a ve smyslu distribucí.

4. Formulujte a dokažte větu o střední hodnotě pro řešení rovnice vedení tepla. Stručně vysvětlete, k čemu se dále využije.

5. Formulujte větu o střední hodnotě pro řešení rovnice vedení tepla. Formulujte a použitím předchozí věty dokažte větu o principu maxima pro rovnici vedení tepla.

6. Vysvětlete nejednoznačnost řešení Cauchyovy úlohy pro rovnici vedení tepla. Formulujte větu o principu maxima pro Cauchyovu úlohu a vysvětlete, proč platí jen za příslušných dodatečných předpokladů. Fourmulujte a dokažte větu o jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy pro rovnici vedení tepla.

7. Formulujte a dokažte větu o principu maxima pro Cauchyovu úlohu pro rovnici vedení tepla. Potřebné další věty formulujte, nemusíte je dokazovat.

8. Formulujte jednotlivé okrajové úlohy pro rovnici vedení tepla. Dokažte jednoznačnost jejich klasického řešení.

9. Vyberte si libovolnou okrajovou úlohu pro rovnici vedení tepla na vhodném omezeném intervalu. Použitím vzorkovací distribuce (její potřebné vlastnosti dokažte) a lemmatu o třech Fourierových transformacích (důkaz stačí naznačit) dokažte, jak lze reprezentovat řešení dané okrajové úlohy.

10. Vysvětlete pojem fundamentální řešení vlnové rovnice, formulujte jednotlivé úlohy, ukažte, jak spolu souvisí, a nalezněte tvar Fourierovy transformace příslušného fundamentálního řešení.

11. Nalezněte fundamentální řešení vlnové rovnice, tedy Fourierovu inverzi (včetně vztahu pro klasické řešení Cauchyovy úlohy) v jedné a ve třech prostorových dimenzích.

12. Nalezněte fundamentální řešení vlnové rovnice, tedy Fourierovu inverzi (včetně vztahu pro klasické řešení Cauchyovy úlohy) ve dvou prostorových dimenzích.

13. Formulujte jednotlivé okrajové úlohy pro vlnovou rovnici. Dokažte jednoznačnost jejich klasického řešení.

14. Formulujte a dokažte větu o konečné rychlosti šíření signálu pro vlnovou rovnici a ukažte na příkladu, že řešení rovnice vedení tepla tuto vlastnost nemá.

15. Nalezněte fundamentální řešení Poissonovy rovnice pro $N \geq 2$. Na vhodné třídě funkcí dokažte také jeho jednoznačnost.

16. Formulujte a dokažte větu o třech potenciálech. Ukažte, že harmonická funkce na oblasti Ω je třídy $C^\infty(\Omega)$.

17. Definujte potenciál jednoduché vrstvy a dvojvrstvy. Definujte pojem harmonické funkce s kontrolovaným růstem. Formulujte a dokažte větu o základních vlastnostech potenciálu jednoduché vrstvy a dvojvrstvy.

18. Definujte objemový (Newtonův) potenciál. Definujte pojem harmonické funkce s kontrolovaným růstem. Formulujte a dokažte větu o základních vlastnostech objemového potenciálu. Vysvětlete význam této věty pro řešení Poissonovy rovnice na omezené množině s vhodnými okrajovými podmínkami.

19. Formulujte větu o třech potenciálech. Formulujte a dokažte větu o střední hodnotě harmonických funkcí a obrácenou větu o střední hodnotě.

20. Formulujte větu o střední hodnotě. Dokažte princip maxima pro harmonické funkce, včetně všech důsledků této věty.

21. Formulujte Dirichletovu úlohu pro Poissonovu rovnici na omezené oblasti. Vysvětlete, že stačí umět řešit Laplaceovu rovnici a vysvětlete zavedení Greenovy funkce pro Dirichletovu úlohu. Naznačte, jak za předpokladu dodatečné hladkosti lze získat Greenovu funkci pro vnitřek koule a pro poloprostor.

22. Formulujte a dokažte větu o řešení Dirichletovy úlohy pro Laplaceovu rovnici na kouli. Formulujte větu pro případ vnějšku koule.

23. Formulujte a dokažte větu o řešení Dirichletovy úlohy na poloprostoru.

24. Formulujte a dokažte Liovilleovu větu pro harmonické funkce a větu o chování harmonických funkcí a jejich derivací na nekonečnu. Případné věty, které potřebujete k důkazu, stačí formulovat.

25. Formulujte vnitřní a vnější Dirichletovu úlohu pro Poissonovu rovnici. Dokažte jednoznačnost řešení pro všechny případy.

26. Formulujte vnitřní a vnější Neumannovu úlohu pro Poissonovu rovnici (pro dostatečně hladké funkce). Dokažte nutnou podmínku řešitelnosti vnitřní Neumannovy úlohy (okomentujte analogickou situaci pro vnější úlohu) a dokažte jednoznačnost řešení všech úloh (na vhodných třídách funkcí).

27. Definujte regulární derivaci podle vnější a vnitřní normály. Formulujte v tomto smyslu vnitřní a vnější Neumannovu úlohu a dokažte jednoznačnost řešení všech úloh (na vhodných třídách funkcí).