Sada příkladů 4/7

# Parciální diferenciální rovnice

## Rovnice vedení tepla

1. Nalezněte řešení rovnice vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

splňující počáteční a okrajovou podmínku

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}\left(t, \frac{1}{2}\right) = 0, \qquad u(0,x) = \delta_a, \quad a \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

2. Nalezněte řešení rovnice vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$$

splňující počáteční a okrajovou podmínku

$$u(0,x) = \delta_a, \quad a \in \left(0, \frac{1}{4}\right), \qquad u(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}\left(t, \frac{1}{4}\right) = 0.$$

Určete $u(t, \frac{1}{4})$ a $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0)$.

3. Najděte radiálně symetrické řešení rovnice vedení tepla v $\mathbb{R}^3$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \qquad x \in B_{\frac{1}{2}}(0) \subset \mathbb{R}^3$$

splňující počáteční a okrajovou podmínku

$$u(0,x) = \chi_{[0,a]}(r), \quad \text{pro } r = |x| \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \qquad a \in \left(0, \frac{1}{2}\right),$$
$$u(t,x) = 0 \quad \text{pro } |x| = \frac{1}{2}.$$

## Vlnová rovnice

4. Řešte Cauchyovu úlohu pro vlnovou rovnici v $\mathbb{R}$ s periodickými počátečními podmínkami

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \quad x \in \mathbb{R},\, t \in \mathbb{R}^+ \\ u(0,x) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) &= g(x), \end{aligned}$$

kde
a) $g(x) = \sin^3(2\pi x)$ b) $g(x) = \cos^4(\pi x)$.

5. Řešte vlnovou rovnici v $\mathbb{R}^+$ s podmínkami

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^+,\, t \in \mathbb{R}^+ \\ u(0,x) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) &= \delta_b, \quad b > 0, \\ u(t,0) &= 0. \end{aligned}$$