Další (méně komplikovanější) příklady na (lineární) rovnice 1. řádu

Př. ① Nalezněte obecné řešení rovnice

$$ax \frac{\partial u}{\partial x} + by \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad a,b \in R$$

Char. systém $\frac{dx}{ds} = ax \qquad \frac{dy}{ds} = by$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\ln(|x|^b) = bas + x_0 \qquad \ln(|y|^a) = bas + y_0$$

$$\Rightarrow \ln(|x|^b |y|^{-a}) = \cancel{C_1 - C_2 = C} \qquad x_0 - y_0 = C_0$$

Tedy obecné řešení je $u(x,y) = \psi(|x|^b |y|^{-a})$

② Nalezněte řešení $\frac{\partial u}{\partial t} + t\frac{\partial u}{\partial x} = 0$

splňující $u(0,x) = \sin x$

$$\Rightarrow \frac{dt}{ds} = 1 \qquad \frac{dx}{ds} = t \qquad \frac{dx}{ds} = s + t_0$$

$$\Downarrow \qquad\qquad x = \frac{1}{2}s^2 + t_0 s + x_0$$

$$t = s + t_0$$

Hledáme funkci, konstantní podél $t = s + t_0$, $x = \frac{1}{2}s^2 + t_0 s + x_0$

$$u(t,x) = \psi\Big(\underbrace{-\frac{1}{2}t^2 + x}_{\underbrace{-\frac{1}{2}s^2 - st_0 + \frac{1}{2}s^2 + t_0 s}_{=0} + t_0^2 + x_0}\Big)$$

$u(0,x) = \sin x \Rightarrow$

$$\boxed{u(t,x) = \sin\left(x - \frac{1}{2}t^2\right)}$$

3 $\frac{\partial u}{\partial t} + t\frac{\partial u}{\partial x} = 0$

$u(t,0) = g(t)$

Stejně jako výše dostanu

$u(t,x) = \varphi\left(-\frac{1}{2}t^2 + x\right) = \varphi_1\left(\sqrt{t^2-2x}\right)$

$u(t,0) = g(t) \Rightarrow \quad u(t,x) = g\left(\sqrt{t^2-2x}\right) \quad (*)$

Tedy na množině $\{(t,x),\ x>0 \wedge t \in (-\sqrt{2x}, \sqrt{2x})\}$ řešení neexistuje, jinak je dáno $(*)$, přičemž požadujeme, aby g byla sudá funkce!

4 Obecné řešení $ay\frac{\partial u}{\partial x} + bx\frac{\partial u}{\partial y} = 0$

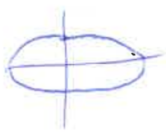
$\frac{dx}{ds} = ay \qquad \frac{dy}{ds} = bx$

$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{2}ay^2\right) = 0$

$\Rightarrow$ charakteristiky jsou $bx^2(s) - a\,y^2(s) = \text{const}$ – záleží na znaménkách a, b

stejná znaménka

různá znaménka



Řešení je

$$\boxed{u(x,y) = \varphi(bx^2 - ay^2)}$$

Niekoľko pomocných nelineárnych PDR 1. rádu

(1) S nelineárnym pravým členom (tzv. kvázilineárne rovnice)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + b\frac{\partial u}{\partial x} = u^2 \quad \text{na } (0,\infty)\times\mathbb{R}$$

$$u(0,x) = u_0(x) \quad \text{v } \mathbb{R}$$

Opäť použijeme pre homogénnu rovnicu metódu charakteristík

$$\frac{dt}{ds} = 1 \qquad \frac{dx}{ds} = b$$

$$\Downarrow$$

$$t = s + t_0 \qquad x = bs + x_0$$

$z(s) = u(s+t_0,\ bs+x_0)$ – rieši rovnicu s nulovou pravou stranou, pretože $\frac{d}{ds}z(s) = 0$

Hľadajme riešenie

$$z'(s) = z^2(s) \qquad z(-t_0) = u(0, x_0 - bt_0) = u_0(x_0 - bt_0)$$

tj. $\left(-\frac{1}{z(s)}\right)' = 1$

$$\frac{1}{z(s)} - \frac{1}{z(-t_0)} = -s - t_0 \qquad z(-C_1) = u(0, C_2 - bC_1)$$

$$z(s) = \frac{z(-t_0)}{1 - (s+t_0)\,z(-t_0)}$$

$s = 0$ $\quad u(t_0, x_0) = \dfrac{u_0(x_0 - bt_0)}{1 - t_0 u_0(x - bt_0)}$

tj. $$\boxed{u(t,x) = \frac{u_0(x-bt)}{1 - t\,u_0(x-bt)}}$$

Všimnime si, že riešenie má zmysel len pre $(1 - t\,u_0(x-bt)) > 0$ $\Rightarrow$ riešenie existuje na $[0, T_{max})$, kde

a) $T_{max} = +\infty$ pre $u_0 \le 0$ na $\mathbb{R}$

b) $T_{max} = \frac{1}{\sup u_0(y)}$ ~~pre u_0~~ inak

Navyše sa dá ukázať, že $\sup_{\mathbb{R}} u(t,x) \to +\infty$ pre $t \to T_{max}^-$

(2) Nelineární ~~rovnice~~ nelevo (kvazilineární rovnice) (11)

Uvažujme $\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ na $(0,\infty)\times\mathbb{R}$

(B) $u(0,x) = u_0(x)$ v $\mathbb{R}$

Jde o tzv. Burgersovu rovnici. Nejprve si všimněme, že rovnici lze psát jako

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0$$

Budeme-li předpokládat řešení taková, že $\lim_{x\to\pm\infty} u(t,x)=0$, pak máme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0 \ \Big/ \int_{-R}^{R} \ \Big/ \lim_{R\to\infty}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} u(t,x)\,dx = 0 \Rightarrow \underline{\int_{\mathbb{R}} u(t,x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\,dx}$$

Analogicky, vynásobením u, dostaneme

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} u^2(t,x)\,dx = 0 \Rightarrow \underline{\int_{\mathbb{R}} u^2(t,x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} u_0^2(x)\,dx}$$

či dokonce (násobením $u|u|^{p-1}$) $\int_{\mathbb{R}} |u|^p(t,x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} u_0^p(x)\,dx \quad \forall p\in[1,\infty)$

a $\lim_{p\to\infty}$ i $\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$

<u>Částečné řešení</u>

Je-li u řešení, pohybujme se po charakteristikách, dostaneme systém ODR

$$\frac{dt}{ds} = 1 \qquad t(0) = t_0$$

$$\frac{dx}{ds} = u(t(s), x(s)) \qquad x(0) = x_0$$

Ale charakteristiky tedy závisí na řešení! Na druhou stranu, protože $t = const + s$, je $\frac{d}{ds}u(s,x(s)) = 0$, tj. $u(s,x(s)) = const.$ Odsud plyne, že řešení naší úlohy (B) lze hledat ve tvaru

$$\boxed{u(t, x + u_0(x)t) = u_0(x)}$$

Abychom to dokázali, vzpomeňme si, že

$t(s) = s + t_0$

$x(s) = Cs + x_0$ $\qquad C = u(s, x(s)) = \text{const}$!

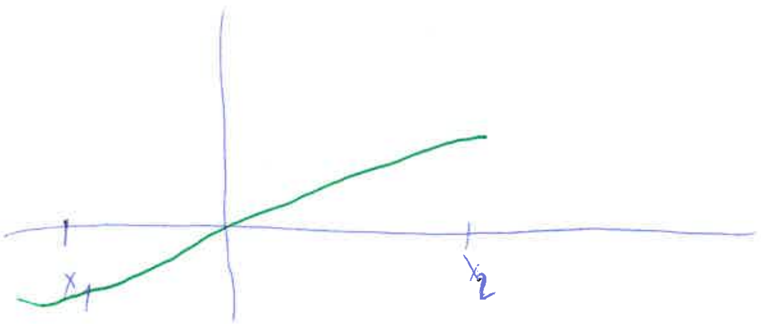
Navíc $C = u(t(s), x(s))\Big|_{s=-t_0} = u(0, x_0 - Ct_0) = u_0(x_0 - Ct_0)$

Zobecnme proměnné $y_0 = x_0 - Ct_0$ máme

$$u(t_0, y_0 + Ct_0) = u_0(y_0),$$

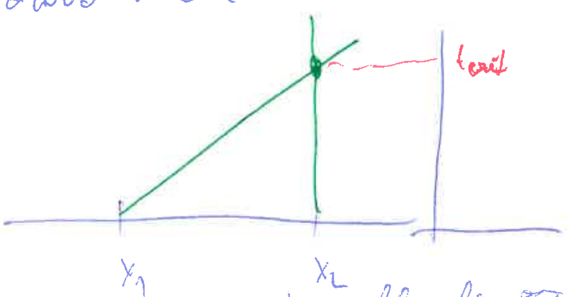
což je přesně to, co jsme chtěli ukázat (volba $t_0 := t$, $y_0 := x$ a připomeň $C = u_0(y_0) = u_0(x)$)

Pozn.: Pro $u(t, x + u_0(x) \cdot t) = u_0(x)$, $C = u_0(x)$ a u_0 neklesající v $\mathbb{R}$ nedochází k tomu, že se protnuly charakteristiky. Je-li $x_1 < x_2 \Rightarrow u(x_1) \le u(x_2)$



Charakteristiky se neprotínají !!

Naopak, je-li $x_1 < x_2$ tak, že $u_0(x_1) > u_0(x_2)$, pak směrnice $u_0(x_1) < u_0(x_2)$ protnou se v konečném čase t_{crit} – tedy klasické řešení neexistuje pro $t \ge t_{crit}$, místo rázová vlna (Tok)



Naše úloha nemusí mít klasické řešení $u \in C^1((0,\infty)\times\mathbb{R}) \cap C([0,\infty)\times\mathbb{R})$. Proto se zavádí tzv. slabé řešení. Mějme $\varphi \in C^1_0((-\infty, T]\times\mathbb{R})$ libovolné, vynásobme (B) φ a integrujme $\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \, dx\, dt$.

$$0 = \int_0^T\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\varphi + u\frac{\partial u}{\partial x}\varphi\right) dx\,dt = \int_0^T\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\varphi + \frac{1}{2}\varphi\frac{\partial}{\partial x}(u^2)\right)dx\,dt$$

per partes, φ kompaktno nosilo v $\mathbb{R}$, $\varphi(T)=0$

$$\Rightarrow -\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\left(u\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)dx\,dt - \int_{\mathbb{R}} u(0,x)\varphi(0,x)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u^2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx\,dt.$$

Šibka formulacija Burgersa

Iščemo $u\in L^2_{loc}([0,T)\times\mathbb{R})$ tak, da

(ŠB) $$-\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dx\,dt - \frac{1}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u^2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx\,dt = \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\varphi(0,x)\,dx$$

$\forall\varphi\in C_0^1((-\infty,T)\times\mathbb{R})$.

V šibki formulaciji nismo rabili nič vedeti o odvodih u, samo vedeti, da $u\in L^2_{loc}([0,T)\times\mathbb{R})$.

Vse odvode smo prenesli na testno funkcijo φ.

Izrek a) Vsaka klasična rešitev (B), je tudi šibka rešitev (B) (oziroma (ŠB))

b) Vsaka šibka rešitev (ŠB) in $u\in C^1([0,T)\times\mathbb{R})$, potem je tudi klasična rešitev (B).

Dk

a) sledi direktno iz izpeljave (ŠB)

b) Ker je $u\in C^1$ lahko integriramo per partes (nazaj!)

$$0 = -\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\left(u\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dx\,dt - \int_{\mathbb{R}} u_0\varphi(0,x)\,dx$$

$$= \int_0^T\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\cdot u_x\right)\varphi\,dx\,dt + \int_{\mathbb{R}}(u(0,x)-u_0(x))\varphi(0,x)\,dx \qquad (+)$$

Po lemi, ki smo jo dokazali pri lemi o izničenju potegne, dobimo

velja ~~$\varphi(0,x)=0$~~ $\varphi\in C_0^1((0,T)\times\mathbb{R})$ dobimo $\frac{\partial u}{\partial t}+u\cdot u_x=0$ (v. + zveznost $\Rightarrow$ povsod na $[0,T)\times\mathbb{R}$.

Sedaj vzamemo poljubno $\varphi(0,x)$ in $u(0,x)=u_0(x)$.

Šibko rešitev je vredno iskati v situaciji, ko rešitve nimamo zagotovljene!

Příklad

Uvažujme řešení $\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ na $(0,T)\times\mathbb{R}$ s počáteční podmínkou

a) $u_0(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & x\geq 0 \end{cases}$ b) $u_0(x) = \begin{cases} 1 & x<0 \\ 0 & x\geq 0 \end{cases}$

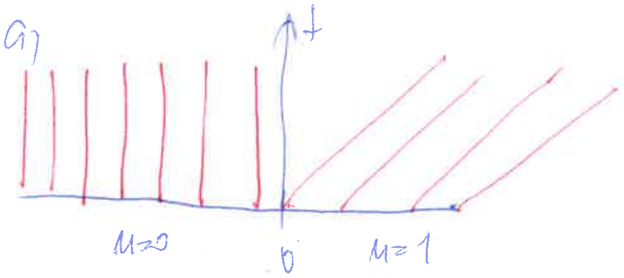
Rovnice charakteristik je $t'(s) = 1$
$x'(s) = u(t(s), x(s))$.

Řešení je konstantní po charakteristikách, protože charakteristika prochází bodem $(0, x_0)$, pak hodnota u bude 0 nebo 1. Mohou nastat následující problémy.

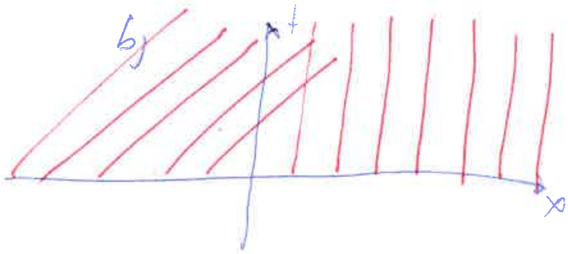
$u=0 \Rightarrow x = x_0,\ t = s$ $u=1$ $x = s + x_0,\ t = s$

Problémy nastávají na množině $S = \{(t,x) \in [0,\infty)\times\mathbb{R} : t > x > 0\}$

a)



b)

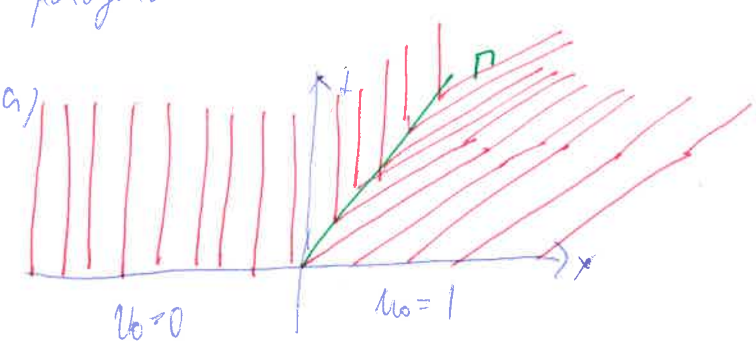


a) Nevíme, co se děje v S .. nejsou charakteristiky

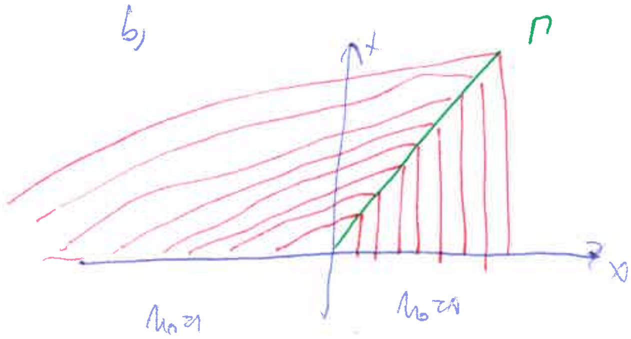
b) Nevíme, co se děje v S, máme tam dvě charakteristiky.

Pokus: uvažujme $\alpha > 0$, položme $\Gamma = \{(t,x),\ t,x > 0,\ t = \alpha x\}$ a definujme řešení, jak je na obrázku

a)



b)



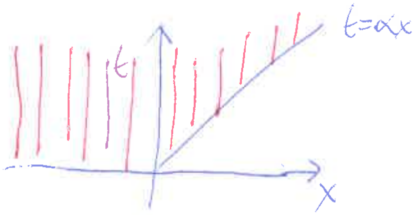
Tedy u je po částech konstantní a nespojitá je pouze na Γ.

Uvidíme později, že pro b) je jen jedna volba Γ (tj. přesně jedna hodnota α).

Nechť $\varphi \in C_0^1((-\infty,T)\times\mathbb{R})$. Pak

$$0 = -\int_0^T\int_{\mathbb{R}} \left(u\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dx\,dt - \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\,\varphi(0,x)\,dx =$$

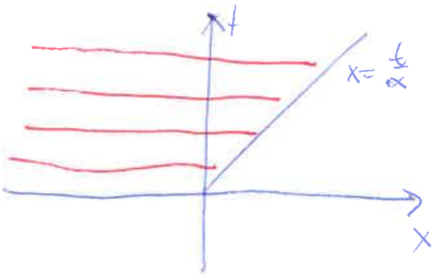
$$= -\iint_{\{\alpha x<t,\, t>0\}} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dx\,dt - \int_{-\infty}^{0} \varphi(0,x)\,dx$$



ad a)

$$-\iint_{\{\alpha x<t,\, t>0\}} \frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dx\,dt = -\int_{-\infty}^{0}\int_0^\infty \frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dt\,dx - \int_0^\infty\int_{\alpha x}^\infty \frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dt\,dx$$

$$= \int_0^\infty \varphi(0,x)\,dx + \int_0^\infty \varphi(\alpha x,x)\,dx$$



ad b)

$$-\iint_{\{\alpha x<t,\, t>0\}} \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx\,dt = -\int_0^\infty\int_{-\infty}^{t/\alpha} \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx\,dt = -\frac{1}{2}\int_0^\infty \varphi\left(t,\frac{t}{\alpha}\right)dt$$

$$= \begin{bmatrix} t=\alpha x \\ dt = \alpha dx \end{bmatrix} = -\frac{\alpha}{2}\int_0^\infty \varphi(\alpha x, x)\,dx$$

Celkem tedy $0 = \left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\int_0^\infty \varphi(\alpha x,x)\,dx$.

Jelikož má rovnost platit pro libovolné $\varphi \in C_0^1((-\infty,T)\times\mathbb{R})$, musí nutně platit $\alpha = 2$.

Našli jsme tedy požadované řešení (rázovou vlnu).