Rovnice matematické fyziky

Milan Pokorný

Přednáška 4.1.2024

24.4.3 Dirichletova úloha pro Laplaceovu rovnici I

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \qquad && \text{na } \mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)} \\ u &= g \qquad && \text{na } \partial B_R(0). \end{aligned} \tag{1}$$

Věta (22 O Greenově funkci pro doplněk koule V 25.4.31)

Nechť $R > 0$ a $g \in C(\partial B_R(0))$. Pak existuje právě jedna harmonická funkce s kontrolovaným růstem řešící klasicky úlohu (1) a lze ji psát ve tvaru

$$u(x) = \frac{1}{\kappa_N} \int_{\partial B_R(0)} g(y) \frac{|x|^2 - R^2}{R|x-y|^N} \, \mathrm{d}S(y) \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)}.$$

24.4.3 Dirichletova úloha pro Laplaceovu rovnici II

Věta (24 O limitním chování harmonické funkce s kontrolovaným růstem V 25.4.34)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *je neomezená množina, pro kterou je* $\partial\Omega$ *omezená, a nechť* $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *je harmonická funkce s kontrolovaným růstem na* Ω *a* $N \geq 3$*. Pak pro každý multiindex* $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ *platí*

$$|D^\alpha u(x)| = \mathrm{O}\Big(\frac{1}{|x|^{N-2+|\alpha|}}\Big) \qquad \text{pro } |x| \to \infty.$$

Je-li $N = 2$ *a* $|\alpha| > 0$*, pak dokonce platí*

$$|D^\alpha u(x)| = \mathrm{O}\Big(\frac{1}{|x|^{1+|\alpha|}}\Big) \qquad \text{pro } |x| \to \infty.$$

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{na } \mathbb{R}^N_+ \\ u &= g && \text{na } \partial\mathbb{R}^N_+ . \end{aligned} \tag{2}$$

Věta (25 O Greenově funkci pro poloprostor V 25.4.36)

Nechť $N \geq 2$ a $g \in C(\partial\mathbb{R}^N_+) \cap L^\infty(\partial\mathbb{R}^N_+)$. Pak funkce

$$u(x) := \frac{2x_N}{\kappa_N} \int_{\partial\mathbb{R}^N_+} \frac{g(y)}{|x-y|^N} \, \mathrm{d}S(y)$$

splňuje $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N_+) \cap C(\overline{\mathbb{R}^N_+})$ a je řešením úlohy (2), přičemž okrajová podmínka je splněna ve smyslu

$$\lim_{x \to x_0, x \in \mathbb{R}^N_+} u(x) = g(x_0) \qquad \textit{pro každé } x_0 \in \partial\mathbb{R}^N_+ .$$

24.4.3 Dirichletova úloha pro Laplaceovu rovnici IV

Cvičení

Ukažte, že pro každé $N \geq 2$ platí ($\kappa_1 = 2$)

$$\frac{2\kappa_{N-1}}{\kappa_N} \int_0^\infty \frac{s^{N-2}}{(s^2+1)^{\frac{N}{2}}} \, \mathrm{d}s = 1. \tag{3}$$

Návod: 1. Přímým výpočtem ukažte, že vztah (3) platí pro $N = 2$ a $N = 3$.
2. Derivováním zlomku $\frac{s^{N-1}}{(1+s^2)^{\frac{N}{2}}}$ ukažte, že pokud označíme

$$J_N := \int_0^\infty \frac{s^{N-2}}{(s^2+1)^{\frac{N}{2}}} \, \mathrm{d}s,$$

dostáváme pro $N \geq 2$

$$\frac{J_{N+2}}{J_N} = \frac{N-1}{N}.$$

3. Použitím vztahu

$$\kappa_N = \frac{N\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(\frac{N}{2}+1)}$$

a indukcí dokažte vztah (3) pro libovolné $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$.

24.4.4 Jednoznačnost řešení Dirichletovy a Neumannovy úlohy pro Poissonovu rovnici I

Věta (26 O jednoznačnosti vnitřní Dirichletovy úlohy II V 25.4.39)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast s dostatečně „hezkou" hranicí (jako ve Větě o integraci per partes, tedy ve Větě 17.3.15). Nechť $u \in C^1(\overline{\Omega})$ takové, že $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \in C(\overline{\Omega})$, $i = 1, 2, \ldots, N$, je (klasické) řešení vnitřní Dirichletovy úlohy pro Poissonovu rovnici. Potom je na této třídě funkcí jednoznačné.

Věta (O prodloužení harmonických funkcí V 25.4.42)

Nechť Ω je omezená oblast, $x_0 \in \Omega$ a u je harmonická a omezená funkce na $\Omega \setminus \{x_0\}$. Potom lze dodefinovat funkci u v bodě x_0 tak, že výsledná funkce je harmonická v Ω.

24.4.4 Jednoznačnost řešení Dirichletovy a Neumannovy úlohy pro Poissonovu rovnici I

Věta (26 O jednoznačnosti vnitřní Dirichletovy úlohy II V 25.4.39)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast s dostatečně „hezkou" hranicí (jako ve Větě o integraci per partes, tedy ve Větě 17.3.15). Nechť $u \in C^1(\overline{\Omega})$ takové, že $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \in C(\overline{\Omega})$, $i = 1, 2, \ldots, N$, je (klasické) řešení vnitřní Dirichletovy úlohy pro Poissonovu rovnici. Potom je na této třídě funkcí jednoznačné.

Věta (O prodloužení harmonických funkcí V 25.4.42)

Nechť Ω je omezená oblast, $x_0 \in \Omega$ a u je harmonická a omezená funkce na $\Omega \setminus \{x_0\}$. Potom lze dodefinovat funkci u v bodě x_0 tak, že výsledná funkce je harmonická v Ω.

24.4.4 Jednoznačnost řešení Dirichletovy a Neumannovy úlohy pro Poissonovu rovnici II

Věta (27 O jednoznačnosti vnější Dirichletovy úlohy V 25.4.43)

Nechť $N \geq 2$. Potom vnější Dirichletova úloha pro Poissonovu rovnici má na třídě funkcí $\{v : v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})\}$ nejvýše jedno řešení.