# Rovnice matematické fyziky

Milan Pokorný

Přednáška 5.10.2023

# 24 Aplikace teorie distribucí na řešení diferenciálních rovnic. Úvod do klasické teorie parciálních diferenciálních rovnic

## 24.1 Obyčejné diferenciální rovnice

### Věta (1 O fundamentálním řešení obyčejné diferenciální rovnice)

*Nechť $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in C(\mathbb{R})$ a funkce $y^- : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$, $y^+ : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ splňují*

$$\begin{aligned} Ly^- &= 0 && \text{na } (-\infty, 0), \\ Ly^+ &= 0 && \text{na } (0, \infty), \\ D^k y^-(0_-) &= D^k y^+(0_+) && \text{pro } k \in \{0, \dots, n-2\} \end{aligned}$$

*a*

$$D^{n-1} y^+(0_+) - D^{n-1} y^-(0_-) = \frac{1}{a_n(0)}.$$

*Pak funkce*

$$y(x) := \begin{cases} y^-(x) & \text{pro } x \in (-\infty, 0) \\ y^+(0_+) & \text{pro } x = 0 \\ y^+(x) & \text{pro } x \in (0, \infty) \end{cases}$$

*splňuje $LT_y = \delta_0$ v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.*

# 24.2 Rovnice vedení tepla (rovnice parabolického typu)
## 24.2.1 Fundamentální řešení rovnice vedení tepla I

### Věta (2 O fundamentálním řešení rovnice vedení tepla)

*Distribuce $T_u$, kde $u$ je dáno vztahem*

$$u(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4t}} \qquad \textit{na } (0,T) \times \mathbb{R}^N,$$

*řeší rovnici*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= 0 \qquad && \textit{na } (0,T) \times \mathbb{R}^N \\ u(0,x) &= \delta_0 && \textit{na } \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

# 24.2.1 Fundamentální řešení rovnice vedení tepla II

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= 0 && \text{na } (0,T) \times \mathbb{R}^N \\ u(0,x) &= u_0(x) && \text{na } \mathbb{R}^N, \end{aligned} \tag{1}$$

**Věta (3 O řešení rovnice vedení tepla s nulovou pravou stranou)**

*Nechť $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ a existují $C > 0$ a $m \in \mathbb{N}$ taková, že*

$$|u_0(x)| \leq C(1 + |x|^2)^m \qquad \text{na } \mathbb{R}^N.$$

*Pak funkce*

$$u(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) \mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \, \mathrm{d}y$$

*splňuje $u \in C^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R}^N)$ a distribuce $T_u$ je řešením úlohy (1). Pokud navíc $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ a $u_0$ je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^N$, pak*

$$\lim_{(t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^N \to (0,x_0)} u(t,x) = u_0(x_0).$$

## 24.2.1 Fundamentální řešení rovnice vedení tepla II

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \qquad & \text{na } (0,T) \times \mathbb{R}^N \\ u(0,x) = u_0(x) \qquad & \text{na } \mathbb{R}^N, \end{aligned} \tag{1}$$

**Věta (3 O řešení rovnice vedení tepla s nulovou pravou stranou)**

*Nechť $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ a existují $C > 0$ a $m \in \mathbb{N}$ taková, že*

$$|u_0(x)| \leq C(1 + |x|^2)^m \qquad \textit{na } \mathbb{R}^N.$$

*Pak funkce*

$$u(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) \mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \, \mathrm{d}y$$

*splňuje $u \in C^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R}^N)$ a distribuce $T_u$ je řešením úlohy (1). Pokud navíc $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ a $u_0$ je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^N$, pak*

$$\lim_{(t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^N \to (0,x_0)} u(t,x) = u_0(x_0).$$