Rovnice matematické fyziky

Milan Pokorný

Přednáška 30.11.2023

24.3.2 Okrajové úlohy pro vlnovou rovnici I

Věta (11 O jednoznačnosti klasických řešení okrajových úloh pro vlnovou rovnici V 25.3.13)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast s dostatečně „hezkou“ hranicí (jako ve Větě o integraci per partes, tedy Větě 17.3.15). Pak pro obě z úloh uvedených výše existuje nejvýše jedno klasické řešení ve třídě funkcí splňujících

$$u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \in L^\infty((0, T_0)\times\Omega) \quad \textit{pro všechna } i \in \{1, \dots, N\} \textit{ a } T_0 \in (0, T) \tag{1}$$

a

$$x \mapsto u(t,x),\ x \mapsto \frac{\partial u}{\partial t}(t,x),\ x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x_i}(t,x),\ x \mapsto \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(t,x) \in C(\overline{\Omega}) \quad \textit{pro všechna } i \in \{1, \dots, N\} \textit{ a } t \in (0, T). \tag{2}$$

24.3.2 Okrajové úlohy pro vlnovou rovnici II

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \qquad \text{v kuželu } C \tag{3}$$

Věta (12 Konečná rychlost šíření signálu pro vlnovou rovnici V 25.3.14)

Nechť $u \in C^2(\overline{C})$ je klasické řešení rovnice (3) na kuželu C. Je-li $u \equiv 0$ a $\frac{\partial u}{\partial t} \equiv 0$ na $B_{t_0}(x_0)$, potom $u \equiv 0$ na C a díky spojitosti též na $\overline{C}$.

Věta (13 O fundamentálním řešení Poissonovy rovnice V 25.4.1)

Fundamentálním řešením Poissonovy rovnice je regulární distribuce reprezentovaná funkcí

$$\mathcal{E}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x| & \textit{pro } N = 2 \\ \frac{1}{(N-2)\kappa_N} \frac{1}{|x|^{N-2}} & \textit{pro } N \geq 3, \end{cases}$$

kde κ_N je míra jednotkové sféry v $\mathbb{R}^N$. Fundamentální řešení je na $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ určeno jednoznačně až na přičtení regulární distribuce reprezentované harmonickým polynomem.

24.4.1 Fundamentální řešení Poissonovy rovnice II

Lemma (3 O distributivním gradientu fundamentálního řešení Poissonovy rovnice L 25.4.3)

Nechť $\mathcal{E}$ je funkce daná předchozí větou. Pak

$$\nabla T_{\mathcal{E}} = T_{\nabla \mathcal{E}}$$

(tedy distributivní gradient je regulární distribuce reprezentovaná klasickým gradientem).

24.4.2 Věta o třech potenciálech a její důsledky I

Věta (14 Věta o třech potenciálech V 25.4.12)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast s dostatečně „hezkou“ hranicí (jako ve Větě o integraci per partes, tedy ve Větě 17.3.15), $u \in C^2(\overline{\Omega})$ a $\mathcal{E}$ značí fundamentální řešení Poissonovy rovnice. Pak pro všechna $x \in \Omega$ platí

$$u(x) = -\int_{\Omega} \mathcal{E}(x-y)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \left(\mathcal{E}(x-y)\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(y) - u(y)\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \boldsymbol{\nu}_y}(x-y)\right)\mathrm{d}S(y),$$

kde

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(y) := \nabla u(y)\cdot \boldsymbol{\nu}(y) \qquad a \qquad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \boldsymbol{\nu}_y}(x-y) := \nabla_y \mathcal{E}(x-y)\cdot \boldsymbol{\nu}(y)$$

a $\boldsymbol{\nu}$ je vnější normála k $\partial\Omega$.

24.4.2 Věta o třech potenciálech a její důsledky II

Důsledek (1 Důsl. 25.4.13)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast s dostatečně „hezkou“ hranicí (jako ve Větě o integraci per partes, tedy ve Větě 17.3.15) a $u \in C^2(\overline{\Omega})$ splňuje $\Delta u = 0$ v Ω. Pak $u \in C^\infty(\Omega)$ a na Ω platí

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \Big(\mathcal{E}(x-y) \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(y) - u(y) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \boldsymbol{\nu}_y}(x-y) \Big) \, \mathrm{d}S(y),$$

kde $\boldsymbol{\nu}$ je vnější normála k $\partial\Omega$.

Definice (1 Potenciály D 25.4.14)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast s dostatečně „hezkou" hranicí (jako ve Větě o integraci per partes, tedy ve Větě 17.3.15) a $\mu, \sigma \colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce a $\varrho \colon \Omega \to \mathbb{R}$ je spojitá a omezená funkce. Pak

$$v(x) := -\int_{\partial\Omega} \mu(y)\mathcal{E}(x-y)\,\mathrm{d}S(y) \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}^N$$

nazýváme potenciálem jednoduché vrstvy,

$$\begin{aligned} w(x) &:= -\int_{\partial\Omega} \sigma(y)\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\boldsymbol{\nu}_y}(x-y)\,\mathrm{d}S(y) \\ &= -\int_{\partial\Omega} \sigma(y)\frac{x-y}{\kappa_N|x-y|^N}\cdot\boldsymbol{\nu}(y)\,\mathrm{d}S(y) \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

nazýváme potenciálem dvojvrstvy (pro tento případ předpokládáme, že Ω je třídy C^2) a

$$\varphi(x) := -\int_{\Omega} \varrho(y)\mathcal{E}(x-y)\,\mathrm{d}y \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}^N$$

nazýváme objemovým (Newtonovým) potenciálem.

24.4.2 Věta o třech potenciálech a její důsledky IV

Definice (2 Harmonická funkce a harmonická funkce s kontrolovaným růstem D 25.4.16)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je oblast a $u \in C^2(\Omega)$. Řekneme, že funkce u je *harmonická* na Ω, jestliže $\Delta u = 0$ na Ω. Řekneme, že funkce u je *harmonická s kontrolovaným růstem* na Ω, jestliže $\Delta u = 0$ na Ω a navíc buď Ω je omezená, nebo

$$u(x) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{|x|^{N-2}}\right) \qquad \text{pro } |x| \to \infty.$$

Věta (15 O potenciálech jednoduché vrstvy a dvojvrstvy V 25.4.18)

Nechť $N \geq 3$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast s dostatečně „hezkou“ hranicí (jako ve Větě o integraci per partes, tedy ve Větě 17.3.15). Nechť $\mu, \sigma \in C(\partial\Omega)$. Pak potenciály jednoduché vrstvy a dvojvrstvy jsou harmonické funkce s kontrolovaným růstem na Ω a na $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$.
Pro $N = 2$ platí tvrzení s tím rozdílem, že potenciál jednoduché vrstvy je na $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$ pouze harmonická funkce.

Věta (16 O objemovém potenciálu V 23.4.19)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast s dostatečně „hezkou“ hranicí (jako ve Větě o integraci per partes, tedy ve Větě 17.3.15). Nechť $\varrho \in L^\infty(\Omega)$. Pak je objemový potenciál $C^1(\Omega)$-funkce, která je harmonická na $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$ pro $N \geq 2$ a harmonická s kontrolovaným růstem na $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$ pro $N \geq 3$ (a také třídy $C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega})$). Je-li navíc $\varrho \in C^1(\overline{\Omega})$, pak $\varphi \in C^2(\Omega)$ a platí

$$\Delta\varphi = \varrho \qquad \text{na } \Omega.$$

24.4.2 Věta o třech potenciálech a její důsledky V

Věta (15 O potenciálech jednoduché vrstvy a dvojvrstvy V 25.4.18)

Nechť $N \geq 3$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast s dostatečně „hezkou“ hranicí (jako ve Větě o integraci per partes, tedy ve Větě 17.3.15). Nechť $\mu, \sigma \in C(\partial\Omega)$. Pak potenciály jednoduché vrstvy a dvojvrstvy jsou harmonické funkce s kontrolovaným růstem na Ω a na $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$.
Pro $N = 2$ platí tvrzení s tím rozdílem, že potenciál jednoduché vrstvy je na $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$ pouze harmonická funkce.

Věta (16 O objemovém potenciálu V 23.4.19)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast s dostatečně „hezkou“ hranicí (jako ve Větě o integraci per partes, tedy ve Větě 17.3.15). Nechť $\varrho \in L^\infty(\Omega)$. Pak je objemový potenciál $C^1(\Omega)$-funkce, která je harmonická na $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$ pro $N \geq 2$ a harmonická s kontrolovaným růstem na $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$ pro $N \geq 3$ (a také třídy $C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega})$). Je-li navíc $\varrho \in C^1(\overline{\Omega})$, pak $\varphi \in C^2(\Omega)$ a platí

$$\Delta\varphi = \varrho \qquad \text{na } \Omega.$$