Zápočtová písemka (19. prosince 2025)

Jméno:

1. (50 bodů) Uvažujte následující úlohu na čtverci $C = (0,1) \times (0,1)$

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (x-1)\sin\left(\frac{1}{y}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{3}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{2u}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{4}}} &= \frac{\sin(y)}{y^{\frac{9}{5}}} && \text{v } C \\
u(0,y) &= 0 && \text{na } (0,1) \\
u(x,1) &= x^2 && \text{na } (0,1) \\
\frac{\partial u}{\partial x}(1,y) &= \sin y && \text{na } (0,1) \\
\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) &= 0 && \text{na } (0,1).
\end{aligned}
$$

(i) Zformulujte úlohu slabě, aby šlo splnit bod (ii).
(ii) Dokažte existenci a jednoznačnost slabého řešení dané úlohy.

2. (15 bodů) Dokažte, že existuje konstanta C taková, že platí

$$\|u\|_{L^3(B_1)} \leq C\|u\|_{L^2(B_1)}^{\frac{1}{3}}\|\nabla u\|_{L^2(B_1)}^{\frac{2}{3}}$$

pro všechna $u \in W_0^{1,2}(B_1)$, $B_1 \subset \mathbb{R}^4$.

3. (15 bodů) Dokažte, že existuje konstanta C taková, že platí

$$\|u\|_{L^2(\partial C)} \leq C\|u\|_{L^2(C)}^{\frac{1}{2}}\|\nabla u\|_{L^2(C)}^{\frac{1}{2}}$$

pro všechny funkce $u \in W^{1,2}(C)$, $C = (0,1)^d$ takové, že $\operatorname{supp} u \subset (0,1)^{d-1}[0,1)$.
Návod: Počítejte integrál

$$\int_0^1 \int_{(0,1)^{d-1}} \frac{\partial}{\partial x_d}(u^2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \dots \mathrm{d}x_{d-1}\mathrm{d}x_d.$$