Otázky ke zkoušce Úvod do PDR šk. rok 2024/25

1. a) Definujte lineární PDR 1. řádu a její řešení, odpovídající charakteristický systém a charakteristiky. Formulujte a dokažte Větu o charakterizaci řešení lineární PDR 1. řádu.
   b) Definujte fundamentální řešení Poissonovy rovnice. Formulujte a dokažte Větu o třech potenciálech.

2. a) Definujte pojem závislé funkce na množině a formulujte Jacobiho větu o závislosti funkcí. Formulujte a dokažte Větu o závislosti N řešení (pro lineární homogenní PDR 1. řádu).
   b) Vysvětlete Duhamelův princip pro případ vlnové rovnice. Ukažte, jak lze takto získat řešení Cauchyovy úlohy pro vlnovou rovnici. Ukažte speciálně, jak vypadá tvar řešení této úlohy alespoň pro jednu a dvě prostorové dimenze.

3. a) Definujte pojmy lineární PDR 1. řádu a její řešení, závislost funkcí na množině a fundamentální systém. Formulujte a dokažte Větu o maximálním počtu nezávislých řešení (pro lineární homogenní PDR 1. řádu).
   b) Formulujte vnitřní a vnější Dirichletovu úlohu pro Poissonovu rovnici. Formulujte a dokažte věty o jednoznačnosti jejich řešení.

4. a) Definujte závislost funkcí na množině a fundamentální systém. Formulujte a dokažte Větu o redukci.
   b) Formulujte okrajové úlohy (Dirichletova, Neumannova) pro vlnovou rovnici. Za vhodných dodatečných předpokladů dokažte větu o „jednoznačnosti řešení“ těchto okrajových úloh.

5. a) Definujte kvazilineární PDR 1. řádu, její řešení a odpovídající charakteristický systém a charakteristiku. Formulujte a dokažte Větu o charakterizaci řešení kvazilineární rovnice.
   b) Formulujte a dokažte Větu o konečné rychlosti šíření signálu pro vlnovou rovnici. Porovnejte toto s vlastnostmi řešení rovnice vedení tepla.

6. a) Definujte kvazilineární PDR 1. řádu a její řešení. Formulujte a dokažte Větu o postačující podmínce pro řešení kvazilineární rovnice.
   b) Napište tvar řešení Cauchyovy úlohy pro vlnovou rovnici s nulovou pravou stranou ve třech prostorových dimenzích. Metodou sestupu do

nižší dimenze ukažte, jak vypadá řešení této úlohy ve dvou prostorových dimenzích.

7. a) Definujte kvazilineární PDR 1. řádu a její řešení. Formulujte a dokažte Větu o nalezení všech řešení kvazilineární rovnice.
   b) Formulujte Dirichletovu a Neumannovu úlohu pro rovnici vedení tepla na polopřímce (jedna prostorová dimenze). Formulujte, jak získáte řešení pomocí řešení na celém prostoru, a dokažte.

8. a) Definujte lineární PDR 2. řádu a její řešení. Definujte klasifikaci rovnic 2. řádu v bodě a na množině. Vysvětlete, jak určíte typ rovnice v bodě pomocí převedení na kanonický tvar.
   b) Definujte fundamentální řešení Poissonovy rovnice. Formulujte a dokažte Větu o řešení Poissonovy rovnice na $\mathbb{R}^N$.

9. a) Definujte fundamentální řešení rovnice vedení tepla. Dokažte vztah pro řešení rovnice vedení tepla pro nulovou pravou stranu.
   b) Formulujte Větu o třech potenciálech. Ukažte, že každá harmonická funkce na omezené množině je hladká (C^∞). Definujte potenciály a ukažte, že potenciál jednoduché vrstvy a dvojvrstvy jsou harmonické funkce na omezené množině.

10. a) Vysvětlete Duhamelův princip pro rovnici vedení tepla. Dokažte Větu o řešení (Cauchyovy úlohy) pro rovnici vedení tepla s netriviální pravou stranou.
    b) Definujte harmonické funkce a harmonické funkce s kontrolovaných růstem. Formulujte a dokažte Větu o střední hodnotě pro harmonické funkce.

11. a) Definujte tepelnou kouli. Dokažte Větu o střední hodnotě pro rovnici vedení tepla.
    b) Formulujte Dirichletovu úlohu pro Laplaceovu rovnici, vysvětlete zavedení Greenovy funkce a naznačte její odvození pro poloprostor.

12. a) Formulujte a dokažte Větu o principu maxima pro rovnici vedení tepla.
    b) Formulujte vnitřní a vnější Neumannovu úlohu pro Poissonovu rovnici. Formulujte a dokažte nutnou podmínku existence řešení pro vnitřní Neumannovu úlohu. Formulujte a dokažte věty o „jednoznačnosti řešení“ pro dané úlohy.

13. a) Formulujte a dokažte Větu o principu maxima pro Cauchyovu úlohu pro rovnici vedení tepla. Okomentujte dodatečnou podmínku na růst řešení v nekonečnu. Dokažte Větu o jednoznačnosti řešení Dirichletovy úlohy pro rovnici vedení tepla.
    b) Formulujte a dokažte Liouvilleovu větu pro harmonické funkce a Větu o limitním chování harmonických funkcí s kontrolovaným růstem.

14. a) Formulujte okrajovou úlohu (Dirichletovu, Neumannovu a Robinovu/Newtonovu) pro rovnici vedení tepla. Dokažte existenci nejvýše jednoho řešení pro Dirichletovu úlohu.
    b) Definujte objemový potenciál a fundamentální řešení Poissonovy rovnice. Formulujte a dokažte Větu o objemovém potenciálu. Vysvětlete aplikaci této věty pro řešení okrajových úloh pro Poissonovu rovnici.

15. a) Formulujte okrajovou úlohu (Dirichletovu, Neumannovu a Robinovu/Newtonovu) pro rovnici vedení tepla. Dokažte existenci nejvýše jednoho řešení pro Neumannovu a Robinovu/Newtonovu úlohu.
    b) Formulujte Větu o střední hodnotě pro harmonické funkce. Formulujte a dokažte Větu o principu maxima pro harmonické funkce.

16. a) Formulujte Cauchyovu úlohu pro vlnovou rovnici. Nalezněte tvar řešení (pro nulovou pravou stranu) v jedné prostorové dimenzi. Formulujte a dokažte lemma o řešení Euler–Darboux–Poissonovy rovnice.
    b) Formulujte Dirichletovu úlohu pro Laplaceovu rovnici. Vysvětlete pojem Greenova funkce. Nalezněte tvar řešení Dirichletovy úlohy na vnitřku koule (tj. nalezněte Greenovu funkci na vnitřku koule).

17. a) Formulujte a dokažte lemma o řešení Euler–Darboux–Poissonově rovnice. Nalezněte tvar řešení Cauchyovy úlohy pro vlnovou rovnici ve třech prostorových dimenzích.
    b) Formulujte a dokažte Větu o řešení Dirichletovy úlohu pro Laplaceovu rovnici na kouli.