1 Úvod

Tato habilitační práce se zabývá matematickou teorií nestlačitelných a stlačitelných Navier–Stokesových rovnic, tedy všeobecně akceptovaných a užívaných modelů viskózních newtonovských tekutin. Až na drobné výjimky se budeme zabývat situací, kdy změny teploty nejsou studovány, tedy bilance celkové energie se redukuje na bilanci energie kinetické a ta, až na případ neomezené oblasti s nekompaktní hranicí (viz práce [Novo et al. 2001]), plyne přímo z bilance hybnosti.

Budeme tedy převážně pracovat s rovnicí kontinuity (tj. bilance hmoty), bilancí hybnosti a příslušnými hraničními a počátečními podmínkami. Nicméně, v následující kapitole bude naznačeno odvození úplného systému rovnic, tj. včetně bilance celkové resp. vnitřní energie. Za jistých zjednodušujících předpokladů dospějeme od obecných bilančních rovnic tekutiny k příslušným Navier–Stokesovým rovnicím. Následující kapitola se pak bude zabývat přehledem vybraných výsledků týkajících se nestlačitelných Navier–Stokesových rovnic, další pak matematickou teorií stlačitelných Navier–Stokesových rovnic.

Za tímto úvodem bude připojeno 10 prací, jejichž jsem autorem nebo jedním z autorů a které obsahují výsledky týkající se uvedených rovnic. Všechny práce byly publikovány v domácích či zahraničních časopisech resp. v recenzovaných sbornících z mezinárodních konferencí.

Jedním z cílů úvodních kapitol je představit současný stav matematické teorie příslušných rovnic a představit předložené práce v tomto kontextu. Samozřejmě není možné zmínit všechny výsledky. Vybral jsem proto jednak ty oblasti, které pokládám za nejdůležitější, a potom ty speciální partie, kterým jsem se v přiložených pracech věnoval.

Poděkování: Tato práce vznikla za přispění rozvojového projektu MŠMT č. 628/2006 „Zlepšování věkové struktury docentů a profesorů“, který mi umožnil věnovat se jeden semestr intenzivně přípravě této práce. Poděkování patří, kromě všech spoluautorů článků, především prof. RNDr. Jindřichu Nečasovi, DrSc. a doc. RNDr. Josefu Málkovi, CSc., od nichž jsem se učil základům moderní teorie parciálních diferenciálních rovnic a též RNDr. Antonínu Novotnému, CSc., dr. hab., který byl mým druhým vedoucím doktorské práce a s nímž jsem i po obhájení doktorské práce intenzívně spolupracoval. Rád bych též poděkoval svým kolegům, doc. RNDr. Josefu Málkovi, CSc., prof. RNDr. Ivanu Netukovi, DrSc. a doc. Ing. Tomáši Roubíčkovi, DrSc. za pečlivé pročtení této práce. V neposlední řadě bych rád poděkoval mé manželce Terezii, která musela těsně po svatbě vydržet, že jsem se občas

věnoval více matematice než jí, a přesto mě v tom podporovala.

2 Bilanční rovnice

V této kapitole se budeme zabývat spíše aspekty matematickými než fyzikálně–inženýrskými. Proto budeme předpokládat, že následující veličiny představují fyzikálně to, co si pod nimi představujeme intuitivně:

- hustota $\varrho(t,x)$
- rychlost $\boldsymbol{v}(t,x)$
- tenzor napětí $\boldsymbol{T}(t,x)$
- vektor vnějších sil $\boldsymbol{f}(t,x)$
- vnitřní energie $e(t,x)$
- tok tepla $\boldsymbol{q}(t,x)$
- zdroj energie (např. radiace) $g(t,x)$
- teplota $\vartheta(t,x)$

Bližší informace o zavedení těchto a dalších veličin je možno nalézt např. v knihách [Gurtin 1981], [Šilhavý 1997] nebo [Maršík 1999]. Dále budeme předpokládat, že tyto veličiny jsou definovány s.v. (popřípadě všude) v oblasti vyplněné tekutinou, tj. pro $t \in (0,T)$, $x \in \Omega(t)$, kde $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^3$.* Předpokládejme, že pro všechny časy je $\Omega(t)$ otevřená, souvislá množina, která se mění „spojitě“ v čase, přičemž toto nebudeme blíže specifikovat. Nechť $\mathcal{B}$ je libovolná otevřená podmnožina $\mathbb{R}^3$ s dostatečně hladkou hranicí. Předpokládáme platnost následujících bilančních rovnic:

(i) Bilance hmoty

Předpokládáme, že

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{B}} \varrho dx = -\int_{\partial\mathcal{B}} \varrho \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} dS, \tag{2.1}$$

tj. hmota nevzniká ani nezaniká, mění se jen díky toku přes hranici; znaménko mínus je zde proto, že $\boldsymbol{n}$ je vnější normála k $\mathcal{B}$.

*Odvodíme rovnice ve třech prostorových proměnných, nicméně v některých situacích budeme studovat i proudění dvojdimenzionální.

(ii) Bilance hybnosti

Předpokládáme, že

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{B}} \varrho \boldsymbol{v} dx = -\int_{\partial\mathcal{B}} (\varrho\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} dS + \int_{\partial\mathcal{B}} \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} dS + \int_{\mathcal{B}} \varrho\boldsymbol{f} dx, \tag{2.2}$$

tj. hybnost se mění díky toku na hranici a působení plošných a objemových sil (tj. 2. Newtonův zákon).

(iii) Bilance momentu hybnosti

Předpokládáme, že

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{B}} \varrho\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v} dx = -\int_{\partial\mathcal{B}} (\varrho\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} dS + \int_{\partial\mathcal{B}} \boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{T}\boldsymbol{n}) dS + \int_{\mathcal{B}} \varrho\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{f} dx, \tag{2.3}$$

tj. neuvažují se žádné vnitřní momenty.

(iv) Bilance celkové energie

Předpokládáme, že

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{B}} \varrho\Big(e+\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2\Big) dx = -\int_{\partial\mathcal{B}} \varrho\Big(e+\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2\Big)\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} dS - \int_{\partial\mathcal{B}} \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n} dS \\ + \int_{\partial\mathcal{B}} (\boldsymbol{T}\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n} dS + \int_{\mathcal{B}} g dx + \int_{\mathcal{B}} \varrho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v} dx,\end{aligned} \tag{2.4}$$

tj. celková energie, která se skládá z energie vnitřní a kinetické, se mění konvekcí, tokem tepla přes hranici, výkonem vnějších objemových a plošných sil a radiací.

K výše uvedeným bilančním rovnicím je třeba přidat vhodnou formulaci 2. zákona termodynamiky. Protože až na drobné výjimky se budeme zabývat izotermálními procesy, nebudeme jej zde formulovat a odkážeme se např. na [Šilhavý 1997], [Maršík 1999] nebo [Rajagopal, Srinivasa 2000].

Uvědomme si, že výše uvedené bilance platí pro libovolnou dostatečně hladkou oblast $\mathcal{B}$. Proto, když na plošné integrály aplikujeme Gauß–Ostrogradského větu a předpokládáme-li dostatečnou hladkost všech vystupujících veličin (k této otázce se vrátíme v příštích kapitolách), dostáváme následující bilanční rovnice v diferenciálním tvaru:

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho\boldsymbol{v}) = 0, \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho\boldsymbol{v}) + \operatorname{div}(\varrho\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}) - \operatorname{div}\boldsymbol{T} = \varrho\boldsymbol{f}, \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v})) + \operatorname{div}(\varrho(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v})\otimes\boldsymbol{v}) - \operatorname{div}(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{T}) = \varrho(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{f}), \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\varrho(e+\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2\Big) + \operatorname{div}\Big(\varrho(e+\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2)\boldsymbol{v}\Big) + \operatorname{div}\boldsymbol{q} - \operatorname{div}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{v}) = g + \varrho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}. \tag{2.8}$$

Připomeňme, že rovnice bilance momentu hybnosti (2.7) není nezávislá, pouze implikuje že tenzor napětí $\boldsymbol{T}$ je symetrický. Výše uvedený systém rovnic má více neznámých než rovnic. Jako základní veličiny vezmeme hustotu ϱ, rychlost $\boldsymbol{v}$ a teplotu ϑ. Je třeba určit zbývající neznámé funkce e, $\boldsymbol{q}$ a $\boldsymbol{T}$. Standardně se uvažuje tok tepla ve tvaru

$$\boldsymbol{q} = -\kappa(\vartheta)\nabla\vartheta, \tag{2.9}$$

tj. Fourierův zákon vedení tepla. O vnitřní energii se předpokládá, že ji lze vyjádřit pomocí teploty a hustoty:

$$e = e(\varrho, \vartheta). \tag{2.10}$$

Zbývá tenzor napětí, který bude chrakterizovat naši tekutinu. Z fyzikálních představ a za mnohých zjednodušujících předpokladů (viz např. kniha [Gurtin 1981]) dostáváme

$$\boldsymbol{T} = -p\boldsymbol{I} + \tilde{\boldsymbol{S}}(\nabla\boldsymbol{u}), \tag{2.11}$$

kde tlak je skalární funkce, pro kterou musíme zadat

$$p = p(\varrho, \vartheta). \tag{2.12}$$

Relace (2.10) a (2.12) musí splňovat jistá omezení plynoucí z termodynamiky, blíže viz [Batchelor 1967].

Pokud dále použijeme fyzikální předpoklad nezávislosti na pozorovateli, dostáváme, že viskózní část tenzoru napětí $\tilde{\boldsymbol{S}}$ závisí pouze na symetrické části gradientu rychlosti $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{v} + (\nabla\boldsymbol{v})^T)$ a to velice speciálním způsobem

$$\begin{gathered}\tilde{\boldsymbol{S}}(\nabla\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})) = \alpha_0(\varrho, \vartheta, \boldsymbol{D}^I, \boldsymbol{D}^{II}, \boldsymbol{D}^{III})\boldsymbol{I} \\ +\alpha_1(\varrho, \vartheta, \boldsymbol{D}^I, \boldsymbol{D}^{II}, \boldsymbol{D}^{III})\boldsymbol{D} + \alpha_2(\varrho, \vartheta, \boldsymbol{D}^I, \boldsymbol{D}^{II}, \boldsymbol{D}^{III})(\boldsymbol{D})^2,\end{gathered} \tag{2.13}$$

kde $\boldsymbol{D}^I = \operatorname{tr}\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{D}^{II} = |\boldsymbol{D}|^2$ a $\boldsymbol{D}^{III} = \det\boldsymbol{D}$ jsou invarianty tenzoru $\boldsymbol{D}$.

My se omezíme na situaci, kdy tenzor $\boldsymbol{S}$ závisí na $\boldsymbol{D}$ lineárně, tj. tekutina je newtonovská. Potom se vztah (2.13) redukuje na

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{D}) = \lambda(\varrho, \vartheta)(\operatorname{tr}\boldsymbol{D})\boldsymbol{I} + 2\mu(\varrho, \vartheta)\boldsymbol{D}. \tag{2.14}$$

Pokud dosadíme (2.11) a (2.14) do (2.5)–(2.8) a připomeneme, že bilance kinetické energie je, za předpokladu dostatečné hladkosti vystupujících veličin, důsledkem bilance hybnosti (2.6), dostáváme stlačitelné Navier–Stokes–Fourierovy rovnice

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \boldsymbol{v}) = 0, \tag{2.15}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}(\varrho \boldsymbol{v}) + \operatorname{div}(\varrho \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}) - \nabla\big(\lambda(\varrho,\vartheta)\operatorname{div}\boldsymbol{v}\big) \\ - \operatorname{div}\big(2\mu(\varrho,\vartheta)\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})\big) + \nabla p(\varrho,\vartheta) = \varrho \boldsymbol{f},\end{gathered} \tag{2.16}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\big(\varrho e(\varrho,\vartheta)\big) + \operatorname{div}\big(\varrho e(\varrho,\vartheta)\boldsymbol{v}\big) - \operatorname{div}\big(\kappa(\vartheta)\nabla\vartheta\big) \\ = \lambda(\varrho,\vartheta)(\operatorname{div}\boldsymbol{v})^2 + 2\mu(\varrho,\vartheta)|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})|^2 - p(\varrho,\vartheta)\operatorname{div}\boldsymbol{v} + g + \varrho \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}.\end{gathered} \tag{2.17}$$

Výsledný systém (2.15)–(2.17) je třeba doplnit o počáteční podmínky pro ϱ, $\varrho\boldsymbol{v}$ a ϑ a o okrajové podmínky pro $\boldsymbol{v}$ a ϑ. O tom se zmíníme trochu více v kapitole 4 věnované stlačitelným Navier–Stokesovým rovnicím.

Třetí kapitola bude věnována rovnicím nestlačitelným. Podmínka nestlačitelnosti je za předpokladu jisté hladkosti rychlostního pole ekvivalentní s podmínkou

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0. \tag{2.18}$$

Opět dostáváme, že tenzor napětí $\boldsymbol{T}$ lze psát jako

$$\boldsymbol{T} = -p\boldsymbol{I} + \boldsymbol{S}, \tag{2.19}$$

kde p je nyní neznámá skalární funkce a viskózní část tenzoru napětí splňuje za předpokladů uvedených výše

$$\boldsymbol{S} = 2\mu(\varrho,\vartheta)\boldsymbol{D}(v). \tag{2.20}$$

Dostáváme tedy tzv. nehomogenní nestlačitelné Navier–Stokesovy rovnice

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0, \tag{2.21}$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\varrho = 0, \tag{2.22}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho \boldsymbol{v}) + \operatorname{div}(\varrho \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}) - \operatorname{div}\big(2\mu(\varrho,\vartheta)\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})\big) + \nabla p = \varrho \boldsymbol{f}, \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(\varrho e(\varrho,\vartheta)\big) + \operatorname{div}\big(\varrho e(\varrho,\vartheta)\boldsymbol{v}\big) - \operatorname{div}\big(\kappa(\vartheta)\nabla\vartheta\big) = 2\mu(\varrho,\vartheta)|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})|^2 + g + \varrho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}. \tag{2.24}$$

Opět je třeba dodat počáteční podmínku pro ϱ, $\varrho\boldsymbol{v}$ a ϑ a okrajové podmínky pro $\boldsymbol{v}$ a ϑ. Pokud navíc předpokládáme, že počáteční hustota je prostorově homogenní, plyne z rovnice (2.22), že hustota zůstává prostorově homogenní pro všechny časy, a proto dostáváme

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \tag{2.25}$$

$$\varrho \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \varrho \operatorname{div}(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}) - \operatorname{div}\big(2\mu(\vartheta)\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})\big) + \nabla p = \varrho \boldsymbol{f}, \tag{2.26}$$

$$\varrho \frac{\partial e(\vartheta)}{\partial t} + \varrho \operatorname{div}\big(e(\vartheta)\boldsymbol{v}\big) - \operatorname{div}\big(\kappa(\vartheta)\nabla\vartheta\big) = 2\mu(\vartheta)|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})|^2 + g + \varrho \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}. \tag{2.27}$$

Tento problém budeme studovat v následující kapitole.

3 Nestlačitelné Navier–Stokesovy rovnice

3.1 Základní pojmy a definice

Úplný systém, tj. systém (2.25)–(2.27) vykazuje, kromě obtížnosti systému (2.25)–(2.26) s $\mu = const$ níže, ještě další problémy, které souvisí s nelineárním členem na pravé straně (2.27). Zmíníme proto pouze nejnovější výsledky, které lze nalézt v pracích [Amann 1995], [Naumann 2005], [Feireisl, Málek 2006] a [Bulíček 2006] a budeme se nadále věnovat Navier–Stokesovým rovnicím bez rovnice vedení tepla, tedy systému

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \quad \text{ v } (0,T) \times \Omega, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}) - \nu \Delta \boldsymbol{v} + \nabla p = \boldsymbol{f} \quad \text{ v } (0,T) \times \Omega. \tag{3.2}$$

K tomuto systému je třeba doplnit počáteční podmínku pro rychlost

$$\boldsymbol{v}(0,x) = \boldsymbol{v}_0(x) \quad \text{ v } \Omega \tag{3.3}$$

a podmínku okrajovou. Zde je několik možností. Matematicky nejpoužívanější je podmínka úplného přilnutí tekutiny k pevné stěně, tj.

$$\boldsymbol{v}(t,x) = \boldsymbol{0} \quad \text{ na } (0,T) \times \partial\Omega \tag{3.4}$$

(později se trochu zmíníme i o nehomogenní Dirichletově podmínce, tj. předepisujeme rychlostní pole na vstupu a výstupu). Další možností je podmínka smyku (někdy též Navierova podmínka)

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0, \qquad \boldsymbol{\tau}_k \cdot (\boldsymbol{T}\boldsymbol{n}) + \alpha \boldsymbol{\tau}_k \cdot \boldsymbol{v} = 0 \quad \text{ na } (0,T) \times \partial\Omega, \tag{3.5}$$

kde $\alpha \geq 0$ a $\boldsymbol{\tau}_k$, $k = 1,2$, označuje dva navzájem kolmé tečné vektory. V dalším budeme stručně značit $\boldsymbol{v} \odot \boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_2)$. Případ $\alpha = 0$

odpovídá úplnému smyku, zatímco $\alpha \to \infty$ vede na homogenní Dirichletovy podmínky (3.4). Je možné uvažovat i komplikovanější hraniční podmínky, my se ale spokojíme s těmito dvěma a uvidíme, že i tak zůstává spousta problémů otevřených. Zmiňme ještě, že v jistém smyslu nejjednodušší případ periodických okrajových podmínek (ale pro více komplikovaný, tzv. mocninný model, kde Navier–Stokesovy rovnice jsou speciálním případem) byl studován v práci [Málek, Rajagopal 2005].

Definice 3.1 (klasické řešení)
Nechť $\boldsymbol{f} \in C((0,T) \times \Omega)$. Potom dvojice funkcí $(\boldsymbol{v}, p)$, kde $\boldsymbol{v} \in C^{1,2}((0,T) \times \Omega) \bigcap C([0,T] \times \overline{\Omega})$ a $p \in C^{0,1}((0,T) \times \Omega)$ je klasickým řešením úlohy (3.1)–(3.4) resp. (3.1)–(3.3) a (3.5) (potom navíc $\nabla \boldsymbol{v} \in C((0,T) \times \overline{\Omega})$), jestliže $\boldsymbol{v}$ a p splňují rovnice (3.1)–(3.2) identicky v $(0,T) \times \Omega$, je splněna podmínka (3.3) ve smyslu spojitých funkcí a ve stejném smyslu je splněna podmínka (3.4) resp. (3.5).

Je jasné, že $\boldsymbol{v}_0$ a $\boldsymbol{f}$ musí splňovat jisté podmínky kompatibility, nicméně i tak je existence klasického řešení pro libovolně dlouhé časy otevřený problém pro případ tří prostorových dimenzí. Poněkud odlišná je situace ve dvou prostorových dimenzích, viz níže.

Dříve než přistoupíme k formulaci obecnějšího pojmu řešení, zmiňme alespoň některé monografie, které se touto problematikou zabývají: [Ladyženskaja 1969], [Temam 1977], [Temam 1983], [Constantin, Foias 1988] a [Lions 1996]; poměrně zajímavý je i článek [Galdi 2000].

Budeme pracovat s Lebesgueovými prostory $L^p(\Omega)$, Sobolevovými prostory $W^{k,p}(\Omega)$ resp. $W^{k,p}_0(\Omega)$ (funkce s nulovou stopou na hranici). Prostory s nulovou divergencí budeme značit $W^{k,p}_{DIV}(\Omega)$ resp. $W^{k,p}_{0,DIV}(\Omega)$ a připomeňme, že budeme pracovat s oblastmi, kde platí $W^{1,p}_{0,DIV}(\Omega) = \{\boldsymbol{u} \in W^{1,p}_0(\Omega); \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0\} = \overline{\{\boldsymbol{u} \in C^\infty_0(\Omega); \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0\}}^{\|\cdot\|_{1,p}}$; viz [Heywood 1976] pro speciální oblasti, kde toto není pravda. Pomocí $L^p_{0,DIV}(\Omega)$ budeme značit prostor funkcí $\overline{\{\boldsymbol{u} \in C^\infty_0(\Omega); \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0\}}^{\|\cdot\|_p}$. Duální prostor k $W^{1,p}_0(\Omega)$ značíme standardně $W^{-1,p'}(\Omega)$. Bochnerovy prostory integrovatelných resp. spojitých funkcí s hodnotami v Banachově prostoru X budeme značit pomocí $L^p((0,T); X)$ resp. $C([0,T]; X)$. Vektorové funkce značíme tučně. Nebudeme rozlišovat mezi X a X^N; toto vyplyne z kontextu.

Definice 3.2 (slabé řešení)
Nechť $\boldsymbol{f} \in L^2((0,T); W^{-1,2}(\Omega))$. Nechť $\boldsymbol{v}_0 \in L^2_{0,DIV}(\Omega)$. Nechť dále $\boldsymbol{v} \in L^\infty((0,T); L^2(\Omega)) \bigcap L^2((0,T); W^{1,2}_{0,DIV}(\Omega))$ je takové, že $\lim_{t\to 0^+} \int_\Omega \boldsymbol{v}(t) \cdot \boldsymbol{\varphi} dx$

$= \int_\Omega \boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi} dx$ *pro všechny* $\boldsymbol{\varphi} \in L^2(\Omega)$. *Potom* $\boldsymbol{v}$ *je slabým řešením Navier–Stokesových rovnic (3.1)–(3.4), jestliže*

$$\Big\langle \frac{\partial v}{\partial t}, \boldsymbol{\varphi} \Big\rangle_{W^{1,2}_{0,DIV}(\Omega)} - \int_\Omega (\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}) : \nabla \boldsymbol{\varphi} dx + \nu \int_\Omega \nabla \boldsymbol{v} : \nabla \boldsymbol{\varphi} dx = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{W^{1,2}_0(\Omega)} \tag{3.6}$$

pro s.v. $t \in (0,T)$ *a pro všechny* $\boldsymbol{\varphi} \in W^{1,2}_{0,DIV}(\Omega)$.

Pokud místo (3.4) uvažujeme (3.5), máme pouze $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ ve smyslu stop na $\partial\Omega$, na levé straně (3.6) přibude člen $\alpha \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{v} \odot \boldsymbol{\tau}) \cdot (\boldsymbol{\varphi} \odot \boldsymbol{\tau}) dS$ a $\boldsymbol{\varphi} \in W^{1,2}_{DIV}(\Omega)$, $\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ na $\partial\Omega$.

Jestliže $\boldsymbol{v}$ navíc splňuje

$$\frac{1}{2} \int_\Omega |\boldsymbol{v}|^2(t,\cdot) dx + \int_0^t \int_\Omega |\nabla \boldsymbol{v}|^2 dx d\tau \le \frac{1}{2} \int_\Omega |\boldsymbol{v}_0|^2 dx + \int_0^t \langle f, \boldsymbol{v} \rangle d\tau \tag{3.7}$$

pro s.v. $t \in (0,T)$, potom toto řešení nazýváme Leray–Hopfovým slabým řešením. Vztah (3.7) (s rovností místo nerovnosti) se formálně dostane použitím $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{v}$ ve (3.6) a integrací přes čas. Pro okrajové podmínky typu (3.5) je v nerovnosti (3.7) nalevo navíc člen $\alpha \int_0^t \int_{\partial\Omega} |\boldsymbol{v} \odot \boldsymbol{\tau}|^2 dS d\tau$.

Poznamenejme pouze, že z definice slabého řešení pro okrajové podmínky typu (3.4) plyne, že $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} \in L^q((0,T); (W^{1,2}_{0,DIV})^*)$ ($q = \frac{4}{3}$ pro $N = 3$ a $q = 2$ pro $N = 2$) a tudíž změnou na množině míry nula máme, že $\boldsymbol{v} \in C([0,T]; L^2_w(\Omega))$. Dále z definice slabého řešení vypadl tlak. K této problematice se vrátíme později.

Definice 3.3 (vhodné slabé řešení)
Nechť $\boldsymbol{f} \in L^{\frac{10}{7}}((0,T) \times \Omega)$. *Nechť* $(\boldsymbol{v}, p)$ *řeší (3.1)–(3.2) ve smyslu distribucí a nechť* $\lim_{t \to 0^+} \int_\Omega \boldsymbol{v}(t) \cdot \boldsymbol{\varphi} dx = \int_\Omega \boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi} dx$ *pro všechna* $\boldsymbol{\varphi} \in L^2(\Omega)$. *Nechť* $\boldsymbol{v} \in L^\infty((0,T); L^2(\Omega)) \bigcap L^2((0,T); W^{1,2}_{0,DIV}(\Omega))$ *a* $p \in L^{\frac{3}{2}}((0,T) \times \Omega)$. *Nechť*

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |\boldsymbol{v}|^2(t,\cdot)\Phi(t,\cdot) dx + \nu \int_0^t \int_\Omega |\nabla \boldsymbol{v}|^2 \Phi dx d\tau \le \int_0^t \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} \Phi dx d\tau \\ &+ \int_0^t \int_\Omega \frac{1}{2} |\boldsymbol{v}|^2 \Big(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nu \Delta \Phi \Big) dx dt + \int_0^t \int_\Omega \Big(p + \frac{1}{2} |\boldsymbol{v}|^2 \Big) \boldsymbol{v} \cdot \nabla \Phi dx d\tau \end{aligned} \tag{3.8}$$

pro všechny $\Phi \in C_0^\infty((0,T) \times \Omega)$, $\Phi \ge 0$ *a s.v.* $t \in (0,T)$.

Potom dvojice $(\boldsymbol{v}, p)$ *se nazývá vhodné slabé řešení Navier–Stokesových rovnic.*

Pro podmínky typu (3.5) bereme $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ ve smyslu stop a Φ hladké až do hranice. Na levé straně (3.8) přibude člen $\alpha \int_0^t \int_{\partial\Omega} |\boldsymbol{v} \odot \boldsymbol{\tau}|^2 \Phi dS d\tau$.

Všimněme si, že na rozdíl od slabého řešení je vhodné slabé řešení dvojice $(\boldsymbol{v}, p)$. Zdá se tedy, že vhodné slabé řešení má tu výhodu, že máme tlak přímo k dispozici. Uvidíme dále, že tlak s minimálně stejnou integrabilitou jako výše lze pro vhodné pravé strany a hladké oblasti zkonstruovat i pro slabé řešení. Tím podstatným rozdílem mezi slabým a vhodným slabým řešením je tedy energetická nerovnost (3.8), která je pro lokální úvahy vhodnější než nerovnost (3.7).

Kromě těchto tří pojmů řešení, kterým se budeme věnovat dále, se používají i další, které zde zmíníme jen okrajově.

Definice 3.4 (velmi slabé řešení†)
Nechť $\boldsymbol{f} = \operatorname{div} \mathcal{F}$, $\mathcal{F} \in L^s((0,T); L^r(\Omega))$, *Potom* $\boldsymbol{v} \in L^s((0,T); L^q(\Omega))$, $\frac{1}{3} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, $\frac{2}{s} + \frac{3}{q} = 1$ *se nazývá velmi slabým řešením Navier–Stokesových rovnic, jestliže*

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega \Big(- \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} - (\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}) : \nabla \boldsymbol{w} dx - \nu \boldsymbol{v} \cdot \Delta \boldsymbol{w} \Big) dx dt \\ = \int_\Omega \boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{w}(0) dx - \int_0^T \int_\Omega \mathcal{F} : \nabla \boldsymbol{w} dx dt \end{aligned} \tag{3.9}$$

pro všechny $\boldsymbol{w} \in C_0^1([0,T); C^2_{0,DIV}(\Omega))$, $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$ *ve smyslu distribucí a* $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ *ve smyslu stop funkcí s integrovatelnou divergencí.*

Bližší informace o tomto řešení, jakož i některé aplikace tohoto pojmu na kritéria regularity je možno nalézt v pracech [Farwig, Galdi, Sohr 2005], [Farwig, Galdi, Sohr 2006] nebo [Amann 2003].

Konečně poslední pojem řešení úzce souvisí s použitím teorie semigrup. Uvažujme pro jednoduchost pouze případ $\Omega = \mathbb{R}^N$. Označme $\mathrm{e}^{t\Delta}$ semigrupu příslušnou Laplaceově operátoru a nechť

$$\mathcal{P}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g} - \nabla \Delta^{-1} \operatorname{div} \boldsymbol{g}.$$

Definice 3.5 („mild“ řešení)
Nechť $\boldsymbol{v}_0 \in X$, $\operatorname{div} \boldsymbol{v}_0 = 0$ *ve smyslu distribucí. Nechť* $\boldsymbol{f} \in L^\infty((0,T); X)$, *kde* X *je vhodný Banachův prostor. Potom* $\boldsymbol{v} \in C([0,T]; X)$ *se nazývá „mild“ řešení Navier–Stokesových rovnice, jestliže* $\boldsymbol{v}$ *je řešením integrální rovnice*

$$\boldsymbol{v} = e^{t\Delta} \boldsymbol{v}_0 - \int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)\Delta} \mathcal{P}(\operatorname{div}(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{f}) ds. \tag{3.10}$$

† Počáteční podmínka $\boldsymbol{v}_0$ musí splňovat jisté technické podmínky, viz např. [Farwig, Galdi, Sohr 2005].

Tento pojem řešení je obzvláště oblíbený mezi specialisty z oboru harmonické analýzy a prostorů funkcí, neboť příslušný operátor lze jednoduše vyjádřit pomocí pseudodiferenciálního operátoru a důkaz existence řešení se redukuje na výpočty příslušných odhadů a na aplikaci Banachovy věty o pevném bodu. Tento pojem řešení má sice některé výhody (řešení je stabilní, důkaz existence je myšlenkově relativně jednoduchý), ale poskytuje pouze řešení lokálně v čase, popřípadě globální řešení pro malá data. My se tímto pojmem řešení zde nebudeme zabývat, odkážeme pouze na [Cannone 1995] nebo na knihu [Lemarié–Rieusset 2002].

Poznamenejme ještě, že pokud existuje klasické řešení, potom je řešením ve smyslu všech ostatních definic (pro Definici 3.5 pro vhodný prostor X).

Na první pohled je poněkud podezřelé, že nejprve máme systém integrálních bilančních rovnic, ze kterých za předpokladu dodatečné hladkosti všech vystupujících veličin odvodíme diferenciální bilanční rovnice a z nich potom slabou formulaci, kde o řešení předpokládáme, že je méně hladké.

Nabízí se myšlenka, jestli nejde odvodit slabou formulaci přímo z integrálních bilančních rovnic. Tuto otázku si položil již C.W. Oseen, který ve své knize [Oseen 1927] odvodil něco, co připomíná slabou formulaci. Protože ale v době, kdy svou práci psal, nebyl Lebesgueův integrál plně akceptován, pracoval s pojmem Riemannova integrálu. Pokud použijeme jeho myšlenku a zkombinujeme ji se standardními tvrzeními z teorie míry a integrálu, není těžké nalézt podmínky na hledané funkce, za kterých lze ukázat, že slabá formulace a bilanční rovnice v integrálním tvaru jsou ekvivalentní a pojem klasického řešení je „nadbytečný“. Tyto podmínky jsou z důvodu existence plošných sil o něco více restriktivní než co požadujeme od slabého řešení. My zde ale toto odvození dělat nebudeme.

3.2 Linearizace Navier–Stokesových rovnic

Pro mnohé následující problémy je užitečná znalost vlastností řešení některých linearizací Navier–Stokesových rovnic. Připomeňme pouze ty nejdůležitější výsledky.

3.2.1 Stacionární Stokesův/Oseenův problém

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast. Potom dvojici $(\boldsymbol{v}, p)$ takovou, že $\boldsymbol{v} \in C^2(\Omega) \bigcap C(\overline{\Omega})$ (resp. $C^2(\Omega) \bigcap C^1(\overline{\Omega})$) a $p \in C^1(\Omega)$ nazýváme klasickým řešením Stokesova problému s nehomogenní Dirichletovou podmínkou (resp. nehomogenní podmínkou smyku), jestliže splňuje identicky v Ω

$$-\nu \Delta \boldsymbol{v} + \nabla p = \boldsymbol{f}, \tag{3.11}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \tag{3.12}$$

a ve smyslu spojitosti až do hranice splňuje okrajovou podmínku na $\partial\Omega$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_*, \tag{3.13}$$

respektive

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = v_\#, \qquad \boldsymbol{\tau}_k \cdot (\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})\boldsymbol{n}) + \alpha \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_k = 0, \tag{3.14}$$

$k = 1, 2$. Zřejmě musí platit $\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{v}_* \cdot \boldsymbol{n} dS = 0$ resp. $\int_{\partial\Omega} v_\# dS = 0$.

Podobně jako pro evoluční Navier–Stokesovy rovnice lze pojem klasického řešení zeslabit

Definice 3.6 (slabé řešení, Stokes)
Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $\boldsymbol{f} \in W^{-1,2}(\Omega)$, $\boldsymbol{v}_* \in W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$. Potom $\boldsymbol{v} \in W^{1,2}_{DIV}(\Omega)$ je slabým řešením Stokesova problému (3.11)–(3.14), jestliže pro $\boldsymbol{v}^* \in W^{1,2}_{DIV}(\Omega)$ takové, že $\boldsymbol{v}^*|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{v}_*$ (ve smyslu stop) je $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}^* \in W^{1,2}_{0,DIV}(\Omega)$ a

$$\int_\Omega \nabla \boldsymbol{v} : \nabla \boldsymbol{\varphi} dx = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle \tag{3.15}$$

pro všechny $\boldsymbol{\varphi} \in W^{1,2}_{0,DIV}(\Omega)$.

Případ smykových okrajových podmínek je analogický a plyne z výše uvedených poznámek.

Opět ze slabé definice vypadl tlak. Jeho rekonstrukce ale není příliš obtížná. Je založena na následujícím obecném výsledku (viz [Bogovskij 1980]):

Věta 3.1 *Nechť $\Omega \in C^{0,1}$, $f \in L^p(\Omega)$, , $1 < p < \infty$, $\int_\Omega f dx = 0$. Potom existuje řešení úlohy*

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} = f \quad & v\ \Omega, \\ \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{0} \quad & na\ \partial\Omega \end{aligned}$$

takové, že

$$\|\boldsymbol{\psi}\|_{1,p} \leq C \|f\|_p,$$

kde C nezávisí na f.

Platí tedy:

Lemma 3.1 *Nechť $\Phi \in W^{-1,q}(\Omega)$, $1 < q < \infty$, je takové, že $\langle \Phi, \boldsymbol{g} \rangle = 0$ pro všechny $\boldsymbol{g} \in W^{1,q'}_{0,DIV}(\Omega)$. Potom existuje $p \in L^q_{loc}(\Omega)$ tak, že*

$$\langle \Phi, \boldsymbol{g} \rangle = \int_\Omega p \operatorname{div} \boldsymbol{g} dx$$

pro všechny $\boldsymbol{g} \in C_0^\infty(\Omega)$. Je-li navíc $\Omega \in C^{0,1}$, potom $p \in L^q(\Omega)$ a výše uvedená identita platí pro všechny $\boldsymbol{g} \in W_0^{1,q'}(\Omega)$.

Důkaz lze nalézt např. v [Galdi 1994a].

Protože problém je eliptický, dostáváme (viz [Agmon et al. 1964], popř. pro nehomogenní Dirichletovy podmínky viz také např. [Galdi 1994a]) tento výsledek:

Věta 3.2 *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $\boldsymbol{f}$ a $\boldsymbol{v}_*$ resp. $v_\#$ splňují předpoklady Definice 3.6. Potom existuje právě jedno slabé řešení Stokesova problému (je-li $\alpha = 0$, pak musíme předpokládat, že oblast Ω není osově symetrická).*

Je-li navíc $\Omega \in C^{\min\{2,k+2\}}$, $\boldsymbol{v}_*$ resp. $v_\# \in W^{k+2-\frac{1}{q},q}(\partial\Omega)$, $\boldsymbol{f} \in W^{k,q}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0,-1\}$, $1 < q < \infty$, potom existuje jediné slabé řešení Stokesova problému takové, že $\boldsymbol{v} \in W^{k+2,q}(\Omega)$ a $p \in W^{k+1,q}(\Omega)$ a platí

$$\|\boldsymbol{v}\|_{k+2,q} + \|p\|_{k+1,q} \leq C(\|\boldsymbol{f}\|_{k,q} + \|\boldsymbol{v}_*\|_{k+2-\frac{1}{q},q,\partial\Omega}) \tag{3.16}$$

(respektive $\boldsymbol{v}_*$ je nahrazeno $v_\#$).

Pro případ $k = -1$ a $p = 2$ stačí, aby Ω byla libovolná (omezená) oblast.

Jestliže je Ω vnější oblast, je výhodnější pro nenulovou rychlost předepsanou v nekonečnu místo Stokesovy aproximace uvažovat aproximaci Oseenovu, tj.

$$-\nu\Delta\boldsymbol{v} + v_\infty\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x_3} + \nabla p = \boldsymbol{f} \qquad \text{v } \Omega, \tag{3.17}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0 \qquad \text{v } \Omega, \tag{3.18}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_* + v_\infty\boldsymbol{e}_3 \qquad \text{na } \partial\Omega, \tag{3.19}$$

$$\boldsymbol{v} \to \boldsymbol{0} \qquad \text{pro } |x| \to \infty. \tag{3.20}$$

Bližší informace lze nalézt v [Galdi 1994a], některé další v [Pokorný 1999]. Odhady singulárních a slabě singulárních operátorů s jádry odpovídajícími fundamentálnímu řešení Oseenova problému (3.17)–(3.18) jsou pak dokázány v [Kračmar et al. 2001].

3.2.2 Nestacionární Stokesův problém

Pro rekonstrukci tlaku pro nestacionární Navier–Stokesovy rovnice s Dirichletovou okrajovou podmínkou budeme potřebovat následující výsledky, týkající se nestacionárního Stokesova problému

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} - \nu\Delta\boldsymbol{v} + \nabla p = \boldsymbol{f} \qquad \text{v } (0,T)\times\Omega, \tag{3.21}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \qquad \text{v } (0,T) \times \Omega, \tag{3.22}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \qquad \text{na } (0,T) \times \partial\Omega, \tag{3.23}$$

$$\boldsymbol{v}(0,x) = \boldsymbol{v}_0(x) \qquad \text{v } \Omega. \tag{3.24}$$

Slabá formulace je analogická jako pro případ nestacionárních Navier–Stokesových rovnic (viz Definice 3.2), pouze se vynechá konvektivní člen. Platí následující

Věta 3.3 *Nechť* $\Omega \in C^2$ *je konvexní oblast. Nechť* $\boldsymbol{f} = \operatorname{div} \mathcal{F}$*, kde* $\mathcal{F} \in L^p((0,T) \times \Omega)$*,* $1 < p < \infty$*,* $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{0}$*. Potom existuje slabé řešení Stokesova problému (3.21)–(3.24) takové, že*

$$\|\boldsymbol{v}\|_{L^p((0,T);W^{1,p}(\Omega))} + \|\boldsymbol{v}\|_{W^{\frac{1}{2},p}((0,T);L^p(\Omega))} \leq C(T)\|\mathcal{F}\|_{L^p((0,T)\times\Omega)}.$$

Navíc, tlak $p = p_1 + \frac{\partial P}{\partial t}$*, kde* P *je harmonická funkce a*

$$\begin{aligned} \|p_1\|_{L^p((0,T)\times\Omega)} + \|\nabla P\|_{L^p((0,T);W^{1,p}(\Omega))} + \|\nabla P\|_{W^{\frac{1}{2},p}((0,T);L^p(\Omega))} \\ \leq C(T)\|\mathcal{F}\|_{L^p((0,T)\times\Omega)}. \end{aligned}$$

Důkaz lze nalézt v [Koch, Solonnikov 2001], kde je též uvažována nenulová okrajová podmínka, ovšem předpoklady na ni jsou mírně technicky komplikované, a proto ji zde pokládáme rovnou nule.

Věta 3.4 *Nechť* $\Omega \in C^2$*. Nechť* $\boldsymbol{f} \in L^p((0,T);L^q(\Omega))$*,* $1 < p,q < \infty$*,* $\boldsymbol{v}_0 \in W^{2(1-\frac{1}{p}),q}(\Omega)$*. Potom existuje slabé řešení Stokesova problému (3.21)–(3.24) takové, že*

$$\begin{aligned} \|\nabla^2 \boldsymbol{v}\|_{L^p((0,T);L^q(\Omega))} + \left\|\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right\|_{L^p((0,T);L^q(\Omega))} + \|\nabla p\|_{L^p((0,T);L^q(\Omega))} \\ \leq C(T)\big(\|\boldsymbol{f}\|_{L^p((0,T);L^q(\Omega))} + \|\boldsymbol{v}_0\|_{W^{2(1-\frac{1}{p}),q}(\Omega)}\big). \end{aligned}$$

Důkaz viz [Giga, Sohr 1991]; pro $p = q$ viz [Solonnikov 1964].

3.3 Stacionární Navier–Stokesův problém

Uvažujme systém

$$\boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} - \nu \Delta \boldsymbol{v} + \nabla p = \boldsymbol{f} \qquad \text{v } \Omega, \tag{3.25}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \qquad \text{v } \Omega, \tag{3.26}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_* \qquad \text{na } \partial\Omega, \tag{3.27}$$

tj. stacionární Navier–Stokesovy rovnice; opět předpokládáme splnění nutné podmínky, že tok okrajové podmínky přes hranici je nulový.

Slabá formulace je analogická Definici 3.6 (tj. ve (3.15) přibude člen $-\int_\Omega (\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}) : \nabla \boldsymbol{\varphi} dx$). Rekonstrukce tlaku se provede použitím Lemmatu 3.1. Konvektivní člen působí problémy při zachycení nehomogenní okrajové podmínky. Nicméně, platí

Věta 3.5 *Nechť* $\boldsymbol{f} \in W^{-1,2}(\Omega)$, Ω *omezená oblast třídy* $C^{0,1}$ *v* $\mathbb{R}^N$, $\boldsymbol{v}^* \in W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$, $\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{v}_* \cdot \boldsymbol{n} dS = 0$. *Potom existuje slabé řešení Navier–Stokesových rovnic* $\boldsymbol{v} \in W^{1,2}_{DIV}(\Omega)$.

Důkaz pochází z práce [Leray 1933]; některé aspekty byly vyjasněny až v [Hopf 1941], ale dá se nalézt ve většině knih o Navier–Stokesových rovnicích, viz např. [Galdi 1994b].

Toto řešení není jednoznačné, jak ukazuje známý protipříklad Judoviče (viz [Judovič 1967]). Pomocí „bootstrapping“ argumentu, aplikovaného na (3.11)–(3.14) s konvektivním členem na pravé straně, není těžké dokázat tento výsledek:

Věta 3.6 *Nechť* $\boldsymbol{f} \in W^{k,q}(\Omega)$, $\boldsymbol{v}^* \in W^{k+2-\frac{1}{q},q}(\partial\Omega)$, $k \geq 0$, $1 < q < \infty$. *Nechť* $\Omega \in C^{k+2}$ *je omezená oblast v* $\mathbb{R}^N$, $N = 2, 3$. *Potom* $\boldsymbol{v} \in W^{k+2,q}(\Omega)$ *a* $p \in W^{k+1,q}(\Omega)$.

Díky principu maxima pro veličinu $p + \frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2$ lze tento výsledek rozšířit i pro dimenze $N > 3$, viz články [Gerhardt 1979], [Frehse, Růžička 1995], [Struwe 1995] a [Frehse, Růžička 1997].

3.4 Vhodné slabé řešení pro evoluční Navier–Stokesovy rovnice

Připomeňme, že tento pojem byl zaveden v Definici 3.3. Na základě prací Scheffera (viz [Scheffer 1977]) bylo vhodné slabé řešení poprvé studováno v práci [Caffarelli et al. 1982]. Později byl tento pojem často používán, protože umožňoval pracovat s řešením lokálně v prostoročase. Připomeňme základní výsledky, týkající se vhodného slabého řešení.

Věta 3.7 *Nechť počáteční podmínka* $\boldsymbol{v}_0 \in W^{\frac{2}{3},1+\varepsilon}(\Omega) \cap L^2_{0,DIV}(\Omega)$, $\varepsilon > 0$ *a pravá strana* $\boldsymbol{f} \in L^2((0,T); W^{-1,2}(\Omega) \cap L^{\frac{3}{2}}((0,T); L^{\frac{18}{13}}(\Omega)$, $\Omega \in C^2$. *Potom existuje alespoň jedno vhodné slabé řešení Navier–Stokesových rovnic.*

Důkaz je možno nalézt ve výše zmíněné práci [Caffarelli et al. 1982] za poněkud jiných předpokladů; viz též [Ladyženskaja, Seregin 1999].

Definice 3.7 *Bod $z = (t, x) \in (0, T) \times \Omega$ se nazývá regulárním bodem řešení v, jestliže existuje $\mathcal{U}(z) \in \mathbb{R}^4$ takové, že $\boldsymbol{v}$ je hölderovsky spojité na $\mathcal{U}(z)$. Bod $\tilde{z}$ se nazývá singulárním bodem, jestliže není regulárním bodem.*

Tato definice pochází z práce [Ladyženskaja, Seregin 1999]. V nyní již klasickém [Caffarelli et al. 1982] byla místo hölderovské spojitosti požadována pouze omezenost. Nedávno v práci [Wolf 2006] bylo dokázáno, že lze brát i lipschitzovskou spojitost, přičemž níže uvedené výsledky zůstanou beze změny. Důkaz je navíc podstatně jednodušší než ve výše uvedených článcích. Práce [Lin 1998] obsahuje jiný důkaz výsledků z [Caffarelli et al. 1982], nicméně mnoho netriviálních detailů je ponecháno čtenáři na ověření.

Platí následující

Věta 3.8 *Nechť $Q_R(z) = B_R(x) \times (t - R^2, t)$. Nechť $\boldsymbol{v}$ je vhodné slabé řešení Navier–Stokesových rovnic, odpovídající $\boldsymbol{f} \in L^2_{loc}((0, T); L^2_{loc}(\Omega))$ takové, že $\sup_{R>0; z\in(0,T)\times\Omega}(\frac{1}{R^{1+2\gamma}} \int_{Q_R(z)} |\boldsymbol{f}|^2 dxdt)^{\frac{1}{2}} < \infty$. Potom existuje $\varepsilon_* > 0$ takové, že pokud*

$$\limsup_{r\to 0^+} \frac{1}{r} \int_{Q_r(z_0)} |\nabla \boldsymbol{v}|^2 dxdt < \varepsilon_*,$$

pak z_0 je regulárním bodem řešení $\boldsymbol{v}$.

Důkaz je možno nalézt buď v [Caffarelli et al. 1982] nebo v novější práci [Ladyženskaja, Seregin 1999]. V práci [Wolf 2006] je mimo jiné ukázáno, že stačí brát $\limsup_{r\to 0^+} \frac{1}{r} \int_{Q(z_0)} \frac{|\mathrm{rot}\, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}|^2}{|\boldsymbol{v}|^2} dxdt$.

Z předchozí věty jednoduše plyne

Věta 3.9 *Nechť Σ je množina všech singulárních bodů vhodného řešení Navier–Stokesových rovnic $\boldsymbol{v}$. Potom jednodimenzionální parabolická míra množiny Σ je nulová.*

V práci [Seregin, Shilkin, Solonnikov 2005] je tento výsledek, spolu s Větou 3.8, dokázán pro pojem hraničních singulárních bodů pro oblasti $\Omega \in C^2$.

3.5 Slabé řešení Navier–Stokesových rovnic

Připomeňme, že v této části budeme pracovat s pojmem řešení ve smyslu Definice 3.2, občas ale budeme používat i Definice 3.1 a 3.3.

Slabé řešení splňuje identitu (3.6). Pokud splňuje navíc energetickou nerovnost (3.7), mluvíme o Leray–Hopfově řešení; pokud (3.7) nahradíme nerovností

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\boldsymbol{v}|^2(t)dx + \int_0^t \int_\Omega |\nabla \boldsymbol{v}|^2 dx d\tau \le \int_s^t \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\rangle d\tau + \frac{1}{2}\int_\Omega |\boldsymbol{v}|^2(s)dx$$

pro všechna $t > 0$ a s.v. $s \le t$, mluvíme o tzv. silné energetické nerovnosti. Na rozdíl od stacionárních Navier–Stokesových rovnic není těžké převést nehomogenní Dirichletovu podmínku na homogenní (máme k dispozici Gronwalovu nerovnost), proto budeme budeme nadále uvažovat buď podmínku (3.4) nebo podmínku (3.5).

Platí následující

Věta 3.10 *Nechť Ω je omezená oblast v $\mathbb{R}^N$, $N = 2, 3$. Dále nechť $\boldsymbol{f} \in L^2((0,T); W^{-1,2}(\Omega))$ a $\boldsymbol{v}_0 \in L^2_{0,DIV}$. Potom existuje alespoň jedno slabé řešení, které splňuje silnou energetickou nerovnost a tudíž $\lim_{t\to 0^+} \|\boldsymbol{v}(t) - \boldsymbol{v}_0\|_2 = 0$.*

Je-li $N = 2$, potom je toto slabé řešení jediné ve třídě slabých řešení a splňuje energetickou rovnost.

Důkaz je klasický, viz [Hopf 1951] nebo monografie [Ladyženskaja 1969], [Temam 1977] či přehledový článek [Galdi 2000]. Zcela analogický výsledek platí i pro smykové okrajové podmínky.

První důkaz pro tři prostorové dimenze byl proveden pro $\Omega = \mathbb{R}^3$ v práci [Leray 1934]. Vzhledem k době vzniku byl autor nucen dokázat spoustu dnes již klasických výsledků z teorie prostorů funkcí a v podstatě jako první zavedl pojem slabého řešení pro evoluční rovnice. Sám J. Leray nazýval toto řešení turbulentní, neboť se domníval, že důvodem případných singularit je právě turbulence. V předchozí práci [Leray 1933] dokázal totiž existenci klasického řešení pro $\Omega = \mathbb{R}^2$ a jako první formuloval dodnes nevyřešený klasický problém, zda pro obecná hladká data existuje (globálně v čase) hladké řešení Navier–Stokesových rovnic pro $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$.

Pokud jde o rekonstrukci tlaku, je situace komplikovanější než ve stacionárním případě. Uvědomme si, že časová derivace rychlosti leží pouze v prostoru $L^q((0,T); (W^{1,2}_{0,DIV})^*)$, není tudíž obecně ani distribuce. Použitím Věty 3.1 dostáváme tedy pouze existenci veličiny, která připomíná formálně primitivní funkci (v čase) k tlaku, není ale obecně podle času diferencovatelná. Proto je nutno použít buď Větu 3.3 nebo 3.4. První tvrzení (tj. píšeme $\boldsymbol{f} = \operatorname{div} \mathcal{F}$ a konvektivní člen ve tvaru $\operatorname{div}(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v})$) sice dávají v jistém smyslu tlak, přičemž jeden člen má odpovídající regularitu, u druhého členu ale narážíme na stejný problém jako dříve: nedostatečná regularita v čase. Proto musíme použít Větu 3.4. Dostáváme (nyní píšeme konvektivní člen ve tvaru $\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}$) tento výsledek:

Věta 3.11 *(i) Nechť $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ je omezená oblast třídy C^2. Nechť pravá strana $\boldsymbol{f}\in L^2((0,T);W^{-1,2}(\Omega))\cap L^{\frac{2q}{3q-2}}((0,T);L^q(\Omega))$, $1<q<2$. Potom existuje tlak p takový, že $\nabla p\in L^{\frac{2q}{3q-2}}((0,T);L^q(\Omega))$, přičemž $\nabla^2\boldsymbol{v}$ a $\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}$ patří do téhož prostoru. Jestliže navíc vezmeme tlak takový, že $\int_\Omega p(t,\cdot)dx=0$ pro s.v. $t\in(0,T)$, potom $p\in L^{\frac{2q}{3q-2}}((0,T);L^{\frac{2q}{2-q}}(\Omega))$.*

(ii) Nechť $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ je omezená oblast třídy C^2. Nechť pravá strana $\boldsymbol{f}\in L^2((0,T);W^{-1,2}(\Omega))\cap L^{\frac{2q}{4q-3}}((0,T);L^q(\Omega))$, $1<q<\frac{3}{2}$. Potom existuje tlak p takový, že $\nabla p\in L^{\frac{2q}{4q-3}}((0,T);L^q(\Omega))$, přičemž $\nabla^2\boldsymbol{v}$ a $\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}$ patří do téhož prostoru. Jestliže navíc vezmeme tlak takový, že $\int_\Omega p(t,\cdot)dx=0$ pro s.v. $t\in(0,T)$, potom $p\in L^{\frac{2q}{4q-3}}((0,T);L^{\frac{3q}{3-q}}(\Omega))$.

Všimněme si, že pro $N=2$ je $p\in L^q((0,T)\times\Omega)$ pro všechna $q<2$, zatímco pro $N=3$ je $p\in L^{\frac{5}{3}}((0,T)\times\Omega)$. Obecně, $p\in L^t((0,T);L^s(\Omega))$, $\frac{2}{s}+\frac{3}{t}=N$, $s\in(1,3)$ pro $N=3$, $s\in(1,\infty)$ pro $N=2$. Hraniční případ $q=1$ ve Větě 3.11 pro tlak je možno brát pro $\Omega=\mathbb{R}^N$, díky odhadům v Hardyho prostorech, viz [Lions 1996].

Všimněme si, že existence druhých prostorových derivací a prvních časových derivací rychlosti nám zaručuje, že rovnice je splněna s.v. v $(0,T)\times\Omega$.

Trochu jiný přístup k rekonstrukci tlaku má J. Wolf, viz [Wolf 2006]. Uvažuje tlak lokálně, ve tvaru $\nabla p=\nabla p_1+\frac{\partial}{\partial t}\nabla p_2$, přičemž $p_1\sim(|\boldsymbol{v}|^2+|\mathcal{F}|)$[‡] a p_2 je prostorově hladká, dokonce harmonická funkce. Tuto část tlaku uvažuje dohromady s časovou derivací, tj.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{v}+\nabla p_2)+\operatorname{div}(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v})-\nu\Delta(\boldsymbol{v}+\nabla p_2)+\nabla p_1=\boldsymbol{f}.$$

To mu umožňuje pracovat s relativně hladkým tlakem i v nehladkých oblastech a dokázat některé zajímavé výsledky, viz např. předchozí kapitola o vhodném slabém řešení.

Poněkud jiná situace je pro případ smykových okrajových podmínek. Tam totiž dostáváme přímo pro slabé řešení $\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}\in L^q((0,T);W^{-1,2}(\Omega))$ a časová derivace je tedy distribuce. Proto můžeme tlak rekonstruovat přímo a dostáváme pro něj stejnou regularitu (připomeňme, že $q=\frac{4}{3}$ pro $N=3$ a $q=2$ pro $N=2$). Tedy odpadají obtíže s neregulární částí tlaku. Analogická situace je pro případ Cauchyovy úlohy či periodických okrajových podmínek.

[‡]Zde se bere $\boldsymbol{f}=\operatorname{div}\mathcal{F}$.

Díky známému odhadu

$$\|\boldsymbol{u}\|_4 \leq C \|\nabla \boldsymbol{u}\|_2^{\frac{1}{2}} \|\boldsymbol{u}\|_2^{\frac{1}{2}}$$

$\forall \boldsymbol{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (toto bylo použito již výše, při důkazu jednoznačnosti), a díky regularitě stacionárního Stokesova problému (viz Věta 3.2) lze dokázat

Věta 3.12 *Nechť $\Omega \in C^2$ je omezená dvojdimenzionální oblast. Nechť $\boldsymbol{f} \in L^2((0,T) \times \Omega)$ a $\boldsymbol{u}_0 \in W^{1,2}_{0,DIV}(\Omega)$. Potom slabé řešení $\boldsymbol{u}$ patří do prostorů $L^2((0,T); W^{2,2}(\Omega)) \cap C([0,T]; W^{1,2}_{0,DIV}(\Omega))$, $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} \in L^2((0,T) \times \Omega)$.*

Dále platí: je-li $\Omega \in C^\infty$ a $\boldsymbol{f} \in C^\infty([0,T] \times \overline{\Omega})$, potom $\boldsymbol{v} \in C^\infty((0,T] \times \overline{\Omega})$.

Analogický výsledek ve třech (a více) dimenzích není znám. Dokonce byl tento problém (pro Cauchyovu úlohu nebo periodické okrajové podmínky) zařazen Clayovým institutem mezi sedm otevřených problémů, za jejichž vyřešení byla nabídnuta odměna 1 000 000 US $, blíže viz informace na webovské stránce `www.claymath.org/millenium`.

Někteří autoři se pokoušeli přeformulovat problém jinak, např. v knize [Chorin 1994] to bylo pomocí tzv. magnetizačních proměnných, v článku [Constantin 2001] pomocí jiného popisu (zde to bylo nazýváno Euler–Lagrangeův popis). Problém regularity se vyřešit nepodařilo; např. pokus P. Constantina měl dokonce tu vlastnost, že i když řešení Navier–Stokesových rovnic bylo regulární, řešení rovnic „Euler–Lagrangeova" popisu mohlo mít blow-up, jak bylo ukázáno v práci [Montgomery–Smith, Pokorný 2002]. Tento článek je součástí habilitační práce, viz [P6] dále.

O podmínkách, zaručujících regularitu, se zmíníme v následující kapitole. Poznamenejme pouze, že některé podmínky zaručující regularitu, zaručují i jednoznačnost ve třídě všech Leray–Hopfových slabých řešení. Ovšem obecně mohou existovat i taková slabá řešení, která energetickou nerovnost nesplňují a může jich být hodně. Nemohou být ale příliš regulární, neboť slabé řešení, které patří do $L^4((0,T) \times \Omega)$, už splňuje dokonce energetickou rovnost.

Zmiňme se teď alespoň o výsledcích, týkajících se regularity pro malá data resp. na krátkém časovém intervalu. Platí (důkaz původně viz článek [Ladyženskaja 1959]; lze ho nalézt např. také v [Galdi 2000]):

Věta 3.13 *Nechť $\Omega \in C^2$. Nechť $\boldsymbol{f} \in L^2((0,T) \times \Omega)$ a $\boldsymbol{v}_0 \in W^{1,2}_{0,DIV}(\Omega)$. Potom existuje $T^* > 0$ takové, že na $(0,T^*)$ existuje řešení Navier–Stokesových rovnic takové, že $\boldsymbol{v} \in L^\infty_{loc}((0,T^*); W^{1,2}_{0,DIV}(\Omega)) \cap L^2_{loc}((0,T); W^{2,2}(\Omega))$, časová* *derivace* $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}$ *a odpovídající tlak* p *jsou prvky* $L^2_{loc}((0,T)\times\Omega)$. *Platí následující odhad:* $T^* \geq \frac{C\nu^3}{\|\nabla \boldsymbol{v}_0\|_2^4}$, $C = C(\Omega)$.

Je-li navíc $\|\boldsymbol{v}_0\|_2 \leq \frac{C\nu^2}{\|\nabla \boldsymbol{v}_0\|_2}$, $C = C(\Omega)$, *potom řešení existuje globálně, tj.* $T^* = T$.

Analogický výsledek platí i pro smykové okrajové podmínky.

Všimněme si, že kritérium globální regularity se dá vyjádřit buď tak, že počáteční podmínka je dostatečně malá vůči viskozitě nebo viskozita je dostatečně velká vůči dané počáteční podmínce.

Dříve než se budeme věnovat regularitě slabého řešení, poznamenejme, že pro slabé řešení s nulovou pravou stranou platí, že $\lim_{t\to\infty}\|\boldsymbol{v}(t)\|_2 = 0$ (viz [Schonbek 1985], [Wiegner 1987] aj.) a tudíž od jistého času je splněno kritérium globální regularity. Navíc platí (viz např. [Heywood 1980])

Věta 3.14 *Nechť* $\boldsymbol{v}$ *je slabé řešení, odpovídající datům* $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ *a* $\boldsymbol{v}_0 \in W^{1,2}_{0,DIV}(\Omega)$. *Nechť* $\boldsymbol{v}$ *splňuje silnou energetickou nerovnost. Potom*

$$(0,\infty) = (\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{T}_i) \bigcup M,$$

kde $\mathcal{T}_i$ *jsou disjunktní časové intervaly, půldimenzionální Hausdorffova míra* M *je nulová a řešení je hladké na intervalech* $\mathcal{T}_i$. *Navíc existují kladná čísla* T_* *a* T^* *taková, že* $(0,T_*)$ *a* $(T^*,\infty) \subset \cup_{i=1}^{\infty}\mathcal{T}_i$.

Nebudeme se zde zabývat otázkou asymptotického chování řešení pro velké časy. O tomto lze nalézt více, kromě již výše zmíněných monografií, např. v [Ladyženskaja 1972], [Sell 1996] nebo v [Sell, You 2002].

3.6 Regularita slabého řešení Navier–Stokesových rovnic ve třech prostorových proměnných

Připomeňme, že tlak v Navier–Stokesových rovnicích patří do

$$p \in L^t((0,T);L^s(\Omega)), \quad \frac{2}{t} + \frac{3}{s} = 3, \quad 1 < s < 3.$$

Zaveďme následující označení. Píšeme[§]

$$u \in (\mathrm{PS})_k$$

[§]PS odpovídá jménům Prodi a Serrin, viz níže.

jestliže $u \in L^t((0,T); L^s(\Omega))$, $\frac{2}{t} + \frac{3}{s} = k$, kde t probíhá maximální možnou délku intervalu. Pokud povolujeme pouze $t < \infty$ (tj. $s > \frac{3}{k}$ pro $k < 3$), budeme značit

$$u \in \widetilde{(\mathrm{PS})}_k.$$

Tyto třídy odpovídají škálování Navier–Stokesových rovnic a tudíž budou hrát roli v následujících kritériích regularity. Než budeme jednotlivá kritéria formulovat, připomeňme, že pokud uvažujeme řešení $(\boldsymbol{v}, p)$ Navier–Stokesových rovnic v celém prostoru s nulovou pravou stranou, potom

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_\lambda &= \lambda \boldsymbol{v}(\lambda^2 t, \lambda x) \\ \pi_\lambda &= \lambda^2 p(\lambda^2 t, \lambda x) \end{aligned}$$

opět řeší Navier–Stokesovy rovnice. J. Leray ve svém článku [Leray 1934] navrhl možnou konstrukci singulárního řešení Navier–Stokesových rovnic v samopodobném tvaru

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{T-t}} \boldsymbol{U}\Big(\frac{x}{\sqrt{T-t}}\Big), \\ p(t,x) &= \frac{1}{T-t} P\Big(\frac{x}{\sqrt{T-t}}\Big), \end{aligned}$$

kde $(\boldsymbol{U}, P)$ řeší

$$\operatorname{div} \boldsymbol{U} = 0, \tag{3.28}$$

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{U} + \frac{1}{2} y \cdot \nabla \boldsymbol{U} - \nu \Delta \boldsymbol{U} + \boldsymbol{U} \cdot \nabla \boldsymbol{U} + \nabla P = 0. \tag{3.29}$$

Pokud existuje netriviální řešení (3.28)–(3.29) takové, že $\boldsymbol{U} \in W^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, potom dostáváme slabé řešení Navier–Stokesových rovnic, pro které máme následující: $\lim_{t\to T^-} \|\boldsymbol{v}\|_2(t) = 0$, ale $\lim_{t\to T^-} \|\nabla \boldsymbol{v}\|_2(t) = \infty$. Až teprve relativně nedávno, v práci [Nečas et al. 1996] bylo ukázáno, že pokud $\boldsymbol{U} \in L^3(\mathbb{R}^3)$, pak $\boldsymbol{U} \equiv 0$. Zjednodušenou formu důkazu (pro $\boldsymbol{U} \in W^{1,2}(\mathbb{R}^3)$) lze nalézt v [Málek et al. 1999]. V práci [Tsai 1998] bylo ukázáno, že každé řešení systému (3.28)–(3.29), které patří do $L^q(\mathbb{R}^3)$ pro jisté $q \in (1, \infty)$, je nutně nulové.

V následujícím textu se budeme pro jednoduchost zabývat kritérii regularity pro slabé, popř. Leray–Hopfovo slabé řešení Cauchyovy úlohy pro nulovou pravou stranu.¶ Pokud bude platit i pro okrajovou úlohu, popř. pro vhodné slabé řešení, bude to v textu zmíněno.

Níže uvedené kritérium regularity vstoupilo do literatury pod názvem Prodi–Serrinovy podmínky (viz [Prodi 1959], [Serrin 1963]). Platí

¶Definice slabého řešení 3.2 zůstává nezměněna, pouze řešení nemá nulovou stopu na hranici a $\Omega = \mathbb{R}^3$.

Věta 3.15 *Nechť* $\boldsymbol{v}$ *je slabé řešení Navier–Stokesových rovnic, které patří do třídy* $(\mathrm{PS})_1$. *Potom je* $\boldsymbol{v}$ *hladké, tj.* $\boldsymbol{v} \in C^\infty((0,T)\times\overline{\Omega})$.

Tato věta byla v [Serrin 1963] dokázána jen pro $\widetilde{(\mathrm{PS})}_1$; platí jak pro omezené oblasti s homogenní Dirichletovou podmínkou nebo podmínkou smyku (pak ale regularita závisí na hladkosti Ω), tak i lokálně (tj. pro vhodné slabé řešení). Případ $\boldsymbol{v} \in L^\infty((0,T);L^3(\mathbb{R}^3))$ byl dokázán teprve nedávno v práci [Escauriaza et al. 2003]; platí i pro poloprostor (viz práce [Escauriaza et al. 2004]). Připomeňme, že slabé řešení splňuje pouze $\boldsymbol{v} \in (\mathrm{PS})_{\frac{3}{2}}$.

Jméno Prodiho je spojeno s jednoznačností slabého řešení. Platí totiž

Věta 3.16 *Nechť* $\boldsymbol{v} \in (\mathrm{PS})_1$ *je slabé řešení Navier–Stokesových rovnic. Potom* $\boldsymbol{v}$ *je jediné řešení ve třídě Leray–Hopfových slabých řešení.*

Důkaz pro třídu $\widetilde{(\mathrm{PS})}_1$ byl proveden v [Prodi 1959]. Později v práci [Kozono, Sohr 1996] byla dokázána jednoznačnost i pro případ, kdy rychlost $\boldsymbol{v} \in L^\infty((0,T);L^3(\Omega))$. Výsledek platí jak pro Cauchyovu, tak i pro námi uvažované okrajové podmínky.

Zajímavá je otázka, co lze říci, pokud není známa informace o celém rychlostním poli, ale jen o některých složkách. Díky rovnici kontinuity není těžké ukázat (viz [Bae, Chae 1997]), že stačí stejná informace (tentokrát na třídě $\widetilde{(\mathrm{PS})}_1$) jen pro dvě složky rychlosti. Platí dokonce

Věta 3.17 *Nechť* $\boldsymbol{v}$ *je Leray–Hopfovo slabé řešení Navier–Stokesových rovnic. Nechť navíc* $v_1 \in \widetilde{(\mathrm{PS})}_{\frac{5}{8}}$. *Potom* $\boldsymbol{v}$ *je hladké.*

Důkaz lze nalézt v [Kukavica, Ziane 2006]. V práci [Neustupa et al. 2002] bylo studováno vhodné slabé řešení a analogický výsledek byl dokázán pro $v_1 \in \widetilde{(\mathrm{PS})}_{\frac{1}{2}}$. Zatímco tento důkaz není těžké přepsat pro formulaci Cauchyovy úlohy, výsledek z Věty 3.17 je založen na odhadech tlaku a není zřejmé, že tentýž výsledek platí lokálně. Jistou interpolaci výsledků z Věty 3.15 a z [Neustupa et al. 2002], tj. je-li

$$\begin{array}{l} u_1, u_2 \in (PS)_a,\ 2 \le t_1 \le \infty,\ 2 \le s_1 \le \infty \\ u_3 \in (PS)_b,\ 2 \le t_2 \le \infty,\ 3 \le s_2 \le \infty \\ a + b \le 2,\ \frac{2}{t_1} + \frac{2}{t_2} \le 1,\ \frac{2}{s_1} + \frac{2}{s_2} < 1, \end{array}$$

pak je řešení hladké, lze nalézt v práci [Neustupa, Penel 2001]. Opět, ačkoliv byl důkaz proveden pro vhodné slabé řešení, platí i globálně pro Cauchyovu úlohu. Protože se v průběhu výpočtu používají odhady druhých derivací a integrace per partes, není zřejmé, že výsledek platí pro námi studované okrajové úlohy. Totéž lze říci i o výsledku Věty 3.17.

Z vět o vnoření plyne, že pro $\nabla \boldsymbol{v} \in (\mathrm{PS})_2$, $\frac{3}{2} \leq s < 3$, dostáváme tvrzení analogické Větě 3.15. V práci [Beirão da Veiga 1995] bylo ukázáno, že totéž platí i pro $s \geq 3$. Protože L^q–norma vorticity $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ je ekvivalentní (díky $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$) L^q–normě gradientu $\boldsymbol{v}$, platí tentýž výsledek i pro vorticitu $\boldsymbol{\omega}$. Tato informace stačí i pouze pro její dvě složky (viz [Chae, Choe 1999]), neboť $\operatorname{div} \boldsymbol{\omega} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0$. Zajímavým otevřeným problémem je regularita řešení v případě jisté regularity pouze jedné složky vorticity.

Analogií výsledku z [Neustupa et al. 2002] je, že $\nabla v_1 \in \widetilde{(\mathrm{PS})}_{\frac{3}{2}}$ implikuje regularitu, což lze nalézt v [Pokorný 2003] (viz též [P2] dále). Tento výsledek byl v [Kukavica, Ziane 2006] vylepšen na $\widetilde{(\mathrm{PS})}_{\frac{11}{5}}$, ovšem pouze pro $s \in [\frac{54}{23}, \frac{18}{5}]$. Další zajímavé výsledky pro jednotlivé složky gradientu lze nalézt v [Penel, Pokorný 2004] (viz [P1] dále) nebo v článku [Pokorný 2005] (viz [P3] dále). Upozorněme například na výsledky, že pro regularitu stačí, aby $\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \in L^\infty((0,T) \times \Omega)$ (tj. $(\mathrm{PS})_0$) nebo $\frac{\partial v_1}{\partial x_1}$ a $\frac{\partial v_2}{\partial x_2} \in \widetilde{(\mathrm{PS})}_2$ či $\frac{\partial v_1}{\partial x_3}$ a $\frac{\partial v_2}{\partial x_3} \in (\mathrm{PS})_1$.

Zajímavé jsou též výsledky v [Neustupa, Penel 2003], kde je ukázáno, že pro regularitu stačí, aby pro $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$, kde λ_k jsou vlastní čísla matice symetrické části gradientu rychlosti, platilo, že $\lambda_2^+ \in \widetilde{(\mathrm{PS})}_2$. Tamtéž lze nalézt další „geometrická kritéria“, související s vlastními vektory symetrické části gradientu rychlosti. Všechny výše uvedené výsledky nejsou zřejmé pro námi studované okrajové podmínky.

Připomeňme, že tlak $p \in (\mathrm{PS})_3$. V práci [Berselli, Galdi 2002] je ukázáno, že platí:

Věta 3.18 *Nechť tlak p, odpovídající Leray–Hopfovu slabému řešení Navier–Stokesových rovnic $\boldsymbol{v}$, patří do $\widetilde{(\mathrm{PS})}_2$. Potom je řešení hladké.*

Poněkud zajímavější výsledek je dokázán v [Seregin, Šverák 2002]:

Věta 3.19 *Nechť tlak p, odpovídající Leray–Hopfovu slabému řešení Navier–Stokesových rovnic $\boldsymbol{v}$, je zdola omezený. Potom je řešení hladké.*

Podmínka ve výše uvedené práci je podstatně obecnější, ale z hlediska aplikací je tento důsledek asi nejzajímavější. Oba výsledky platí pouze pro Cauchyovu úlohu. V práci [Nečas, Neustupa 2002] je ale ukázáno, že pro lokální regularitu vhodného slabého řešení stačí, aby záporná část p_- tlaku p patřila lokálně do $\widetilde{(\mathrm{PS})}_2$. Je ale třeba předpokládat na jistém menším okolí dodatečnou podmínku na rychlost.

Další zajímavé výsledky se pak týkají směru vorticity. V práci [Constantin, Fefferman 1993] je ukázáno, že pokud $\frac{\nabla\boldsymbol{\omega}}{|\nabla\boldsymbol{\omega}|}$ je dostatečně hladký a nemění se příliš rychle, je řešení hladké. Tyto výsledky byly později zesíleny v [Berselli, Beirão da Veiga 2002]. Protože jsou tyto podmínky relativně technické, nebudeme je zde formulovat.

3.7 Osově symetrické řešení

Protože dvojdimenzionální řešení je hladké, zatímco o trojdimenzionálním to není známo, nabízí se otázka, jak to vypadá v situacích, které jsou něco mezi tím. My se budeme zabývat osově symetrickým prouděním. Další možnosti jsou například helická symetrie (viz [Ponce et al. 1994]), nebo třetí rozměr je dostatečně malý (tj. tenká vrstva), viz [Raguel, Sell 1993] nebo [Temam, Ziane 1996].

Definice 3.8 *Skalární funkce je osově symetrická, jestliže, vyjádřena v cylindrických souřadnicích, nezávisí na úhlové proměnné φ.*

Vektorová funkce $\boldsymbol{v}$ je osově symetrická, jestliže složky v_r, v_φ a v_z, vyjádřené v cylindrických souřadnicích, nezávisí na úhlové proměnné φ.

Řešení Navier–Stokesových rovnic se nazývá osově symetrické, jestliže p a $\boldsymbol{v}$ jsou osově symetrické.

Řešení Navier–Stokesových rovnic se nazývá osově symetrické bez swirlu, jestliže je osově symetrické a navíc $v_\varphi \equiv 0$.

Z Věty 3.9 přímo plyne, že možné singularity mohou nastat pouze na ose symetrie (pro vhodné slabé řešení), jinak je singulární množina nejméně jednodimenzionální křivka, což je v rozporu s Větou 3.9.

První výsledek byl dokázán v šedesátých letech pro Cauchyovu úlohu s daty, které jsou osově symetrické bez swirlu (stejně tak i řešení), v pracech [Ladyženskaja 1968] a [Uchovskij, Judovič 1968]. Později, v práci [Leonardi et al. 1999] byl proveden jiný důkaz, založený na lokální existenci hladkého řešení a stejně jako práce zmíněné výše, na apriorním odhadu pro $\frac{\omega_\varphi}{r}$, kde ω_φ je jediná nenulová složka vorticity. Platí tedy:

Věta 3.20 *Nechť pravá strana $\boldsymbol{f} \in L^2((0,T); W^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ je taková , že $\frac{\boldsymbol{f}}{r} \in L^2((0,T); W^{1,2}(\mathbb{R}^3))$. Nechť $\boldsymbol{v}_0 \in W^{2,2}_{DIV}(\mathbb{R}^3)$, přičemž obě funkce jsou osově symetrické bez swirlu. Potom existuje řešení Navier–Stokesových rovnic, osově symetrické bez swirlu, které odpovídá těmto datům a které je hladké. Toto řešení je jednoznačné ve třídě všech Leray–Hopfových slabých řešení.*

Pro obecná osově symetrická řešení není regularita obecně známa. Jeden možný přístup k této problematice, založený na „malosti" (v jistých normách) rozdílu od osově symetrických dat bez swirlu, je prezentován v knize [Zajączkowski 2004]. Druhá možnost je, podobně jako v případě obecného trojdimenzionálního proudění, formulovat kritéria, za kterých je řešení hladké. Očekáváme, že kritéria budou méně restriktivní než v předchozí kapitole. Budeme dále uvažovat $\boldsymbol{f} \equiv \mathbf{0}$.

První výsledek se týká složky rychlosti v_r. Platí

Věta 3.21 *Nechť $\boldsymbol{v}$ je Leray–Hopfovo slabé řešení Navier–Stokesových rovnic, odpovídající počáteční podmínce $\boldsymbol{v}_0 \in W^{2,2}_{DIV}(\mathbb{R}^3)$. Nechť $v_r \in \widetilde{(\mathrm{PS})}_1$. Potom je $\boldsymbol{v}$ a odpovídající tlak p hladké osově symetrické řešení Navier–Stokesových rovnic.*

Důkaz byl poprvé uveřejněn v [Neustupa, Pokorný 2000] (viz též [P4] dále) pro vhodné slabé řešení a v [Neustupa, Pokorný 2001] pro Cauchyovu úlohu. Nezávisle byl později dokázán v [Chae, Lee 2002]. Tato práce pak obsahuje i další kritéria pro jisté váhové normy rychlosti a jejich derivací.

V pracích [Neustupa, Pokorný 2000] a [Neustupa, Pokorný 2001] byla studována i kritéria pro složku v_φ, což je vhledem k Větě 3.20 poněkud přirozenější. Ovšem výsledek nebyl optimální z hlediska škálování. Teprve v práci [Pokorný 2002] (viz též [P5] dále) byla pomocí váhových odhadů pro singulární integrální operátory dokázána

Věta 3.22 *Nechť $\boldsymbol{v}$ je Leray–Hopfovo slabé řešení Navier–Stokesových rovnic, odpovídající $\boldsymbol{v}_0 \in W^{2,2}_{DIV}(\mathbb{R}^3)$. Nechť $v_\varphi \in L^t((0,T); L^s(\mathbb{R}^3))$, $\frac{2}{t} + \frac{3}{s} < 1$, $s > 4$. Potom je $\boldsymbol{v}$ a odpovídající tlak p hladké osově symetrické řešení Navier–Stokesových rovnic.*

Konečně, v práci [Kreml, Pokorný 2007] bylo toto kritérium rozšířeno i pro $s \leq 4$. Ovšem za silnějšího předpokladu $v_\varphi \in L^t((0,T); L^s(\mathbb{R}^3))$, $\frac{2}{t} + \frac{3}{s} < 1 - \frac{3}{s}$, $s \in (\frac{24}{7}, 4]$. Obecný případ regularity osově symetrického řešení v $\mathbb{R}^3$ je otevřený.

4 Stlačitelné Navier–Stokesovy rovnice

Stejně jako pro případ nestlačitelných rovnic budeme studovat systém (2.15)–(2.17) za předpokladu, že teplota je konstantní a nebudeme rovnici (2.17) uvažovat.

Zmiňme pouze, že v posledních letech bylo ve studiu systému (2.15)–(2.17) dosaženo velkého pokroku. Výsledky, týkající se tohoto systému, lze nalézt v knize [Feireisl 2004], dále pak např. v [Feireisl et al. 2005] [Feireisl, Novotný 2005] a výsledky týkající se singulárních limit pro úplný systém např. v [Feireisl, Novotný 2006], [Feireisl, Novotný 2007]. Pokud jde o silná řešení (za předpokladu malosti dat), pak připomeňme, že tento systém byl studován od prvopočátku, spolu se systémem izotermálním (viz slavný článek [Matsumura, Nishida 1980]). Existuje proto celá řada výsledků, týkající se asymptotického chování, stability aj., které zde nebudeme zmiňovat. Jako ilustrativní příklad tohoto typu výsledků uveďme článek [Padula, Pokorný 2001], který je součástí této habilitační práce, viz [P10].

Také nebudeme specifikovat pojem slabého řešení pro systém (2.15)–(2.17). Jen zmiňme, že pokud studujeme rovnici (2.17), tj. bilanci termální energie, nastávají jisté problémy s členy obsahujícími gradient rychlosti na pravé straně. Je proto výhodnější brát bilanci celkové energie (2.8). Analogicky jako v případě nestlačitelných Navier–Stokesových rovnic je možno odvodit slabou formulaci přímo z bilančních rovnic v integrálním tvaru. Buď můžeme použít modifikovaný „Oseenův" postup nebo Morse–Sardovu větu, jak je ukázáno v [Feireisl 2004].

Dříve než budeme studovat stlačitelné Navier–Stokesovy rovnice, připomeňme alespoň dvě další monografie, které se touto problematikou zabývají. Jde o druhý díl [Lions 1998], a dále o knihu [Novotný, Straškraba 2004], která je přehlednější a úplnější, než kniha Lionsova.

4.1 Stacionární stlačitelné Navier–Stokesovy rovnice

Budeme se zabývat systémem parciálních diferenciálních rovnic

$$\operatorname{div}(\varrho \boldsymbol{v}) = 0 \quad \text{ v } \Omega, \tag{4.1}$$

$$\operatorname{div}(\varrho \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}) - 2\mu \operatorname{div} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}) - \lambda \nabla \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \nabla p(\varrho) = \varrho \boldsymbol{f} \quad \text{ v } \Omega. \tag{4.2}$$

Stejně jako v předchozí kapitole se budeme zabývat dvěma typy okrajových podmínek. Jednak půjde o homogenní Dirichletovy podmínky

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \quad \text{ na } \partial\Omega \tag{4.3}$$

nebo o podmínky smyku

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0, \qquad \boldsymbol{\tau}_k \cdot (\boldsymbol{T}\boldsymbol{n}) + \alpha \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_k = 0 \text{ na } \partial\Omega, \quad k = 1, 2, \tag{4.4}$$

kde

$$\boldsymbol{T} = 2\mu \boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}) + \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{v} \boldsymbol{I} - p(\varrho) \boldsymbol{I}.$$

Budeme uvažovat, že

$$p(\varrho) = \varrho^\gamma, \quad \gamma \geq 1,$$

popř. $p(\cdot)$ je ryze monotonní funkce, která splňuje $\lim_{t\to\infty} \frac{p(t)}{t^\gamma} \in (0,\infty)$.

Toto odpovídá izentropické aproximaci. Problém, kdy $p(\varrho)$ je obecná funkce, popř. dokonce kdy $p(\varrho)$ pouze není striktně monotónní, je otevřený.

Z matematického hlediska je vyšší γ obecně jednodušší, neboť máme lepší apriorní odhady hustoty. Z fyzikálního hlediska jsou zajímavější případy, kdy je γ blízko 1 ($\gamma = \frac{5}{3}$ je hodnota pro monoatomický plyn, pro komplikovanější látky jsou hodnoty nižší).

Zajímavý, ale matematicky obtížný, je také případ $\gamma = 1$, tj. izotermální případ pro ideální plyn.

Všimněme si, že jsme kromě zanedbání teplotní závislosti a časových derivací též předpokládali, že koeficienty μ a λ nezávisí na hustotě ϱ. Až do výsledků P.L. Lionse (viz [Lions 1998]) byl tento systém studován převážně z pohledu silných řešení pro malá data. Nyní se již ale studují spíše řešení slabá, která sice nejsou jednoznačná, ale existují pro libovolně velká data. My se nejprve budeme zabývat slabými řešeními, posléze se stručně zmíníme i o řešeních silných.

4.1.1 Slabá řešení pro stacionární stlačitelné Navier–Stokesovy rovnice

Dříve než přistoupíme k definici slabého řešení, připomeňme jeden důležitý pojem týkající se rovnice kontinuity.

Definice 4.1 *Dvojice $(\varrho, \boldsymbol{v})$ je renormalizovaným řešením rovnice kontinuity, jestliže, po prodloužení nulou vně Ω, $(\varrho, \boldsymbol{v})$ řeší*

$$\operatorname{div}(b(\varrho)\boldsymbol{v}) + (\varrho b'(\varrho) - b(\varrho)) \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \tag{4.5}$$

pro každou funkci $b(\cdot) \in C^1((0,\infty)) \cap C([0,\infty))$ takovou, že $|b'(t)| \leq ct^{-\lambda_0}$, $t \in (0,1]$, $\lambda_0 < 1$, $|b'(t)| \leq Ct^{\lambda_1}$, $t \geq 1$, $-1 < \lambda_1 < \infty$.

Tento pojem (zejména pak pro evoluční případ) byl inspirován prací [DiPerna, Lions 1989] a stal se jedním z důležitých pojmů moderní teorie rovnic stlačitelného proudění.

Definice 4.2 (homogenní Dirichletova podmínka)
Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N = 2,3$, je omezená lipschitzovská oblast. Potom $(\varrho, \boldsymbol{v})$ je renormalizované slabé řešení s omezenou energií systému (4.1)–(4.3), jestliže

- *$\varrho \in L^s(\Omega)$ pro jisté $\gamma \leq s \leq \infty$*
- *$\varrho \geq 0$ s.v. v Ω*
- *$\boldsymbol{v} \in W_0^{1,2}(\Omega)$*
- *rovnice (4.1) je splněna ve smyslu Definice 4.1*[‖] *(pro $\lambda_1 = \frac{s}{2} - 1$)*
- *bilance hybnosti je splněna ve smyslu distribucí na Ω*
- *je splněna energetická nerovnost*

$$\mu \int_\Omega |\nabla \boldsymbol{v}|^2 dx + (\mu + \lambda) \int_\Omega (\operatorname{div} \boldsymbol{v})^2 dx \leq \int_\Omega \varrho \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} dx.$$

Je-li Ω vnější oblast v $\mathbb{R}^3$ (v $\mathbb{R}^2$ jsou jisté potíže s tím, že funkce s gradientem v $L^2(\Omega)$ může u nekonečna růst), pak za předpokladu, že klasická formulace je doplněna o podmínky

$$\boldsymbol{v} \to \boldsymbol{0} \qquad \text{a} \qquad \varrho \to \varrho_\infty \qquad \text{pro } |x| \to \infty,$$

dojde v definici slabého řešení k následujícím změnám: $\varrho \in L^s_{loc}(\overline{\Omega})$, $\varrho - \varrho_\infty \in L^q(\Omega)$ pro jisté $q \in (1, \infty)$ a $\boldsymbol{v} \in D_0^{1,2}(\Omega)$ (homogenní Sobolevův prostor, viz např. [Galdi 1994a]). Případ oblasti s nekompaktní hranicí bude zmíněn níže.

Pro případ smykových okrajových podmínek uvedeme definici jen pro omezenou oblast. Pro případ vnější oblasti by změny byly analogické změnám výše.

Definice 4.3 (smykové podmínky)
Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N = 2, 3$, je omezená lipschitzovská oblast. Potom $(\varrho, \boldsymbol{v})$ je renormalizované slabé řešení s omezenou energií systému (4.1), (4.2) a (4.4), jestliže

- *$\varrho \in L^s(\Omega)$ pro jisté $\gamma \leq s \leq \infty$*
- *$\varrho \geq 0$ s.v. v Ω*
- *$\boldsymbol{v} \in W^{1,2}(\Omega)$, $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ ve smyslu stop na $\partial\Omega$*
- *rovnice (4.1) je splněna ve smyslu Definice 4.1 (pro $\lambda_1 = \frac{s}{2} - 1$)*

[‖] Je možno brát $b \equiv 1$.

- *bilance hybnosti je splněna ve smyslu*

$$
\begin{aligned}
&-\int_\Omega \varrho(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}):\nabla\boldsymbol{\varphi}+\lambda\int_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{v}\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}dx+2\mu\int_\Omega \boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}):\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\varphi})dx\\
&\quad+\alpha\int_{\partial\Omega}(\boldsymbol{v}\odot\boldsymbol{\tau})\cdot(\boldsymbol{\varphi}\odot\boldsymbol{\tau})dS-\int_\Omega p(\varrho)\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}dx=\int_\Omega \varrho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}dx
\end{aligned}
$$

  pro všechny $\boldsymbol{\varphi}\in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{n}=0$ *na* $\partial\Omega$

- *je splněna energetická nerovnost*

$$
2\mu\int_\Omega |\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})|^2dx+\lambda\int_\Omega(\operatorname{div}\boldsymbol{v})^2dx+\alpha\int_{\partial\Omega}|\boldsymbol{v}\odot\boldsymbol{\tau}|^2dS\le\int_\Omega\varrho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}dx.
$$

První důkaz existence řešení byl proveden v omezených oblastech P.L. Lionsem v knize [Lions 1998] pro $\gamma\ge\frac{5}{3}$ a $\Omega\in C^2$ ve třech prostorových dimenzích, pro $\gamma>1$ ve dvou prostorových dimenzích. Později, pro potenciální síly, byla existence řešení dokázána pro $\gamma>\frac{3}{2}$ ($N=3$) v práci [Novo, Novotný 2002]. V práci [Novo, Novotný 2005] pak bylo ukázáno, že stačí, aby $\Omega\in C^{0,1}$. Analogické výsledky platí i pro smykové okrajové podmínky, důkaz je naznačen v [Novotný, Straškraba 2004].

Důkaz existence řešení je technicky poměrně náročný. Je založen na komplikované aproximaci, na variantě kompenzované kompaktnosti, která umožňuje provést limitní přechod pro tlak, a na pojmu renormalizovaného řešení rovnice kontinuity. Fundamentální roli hraje veličina efektivní viskózní tok

$$
-(\mu+\lambda)\operatorname{div}\boldsymbol{v}+p(\varrho),
$$

která má lepší vlastnosti než veličiny v ní vystupující zvlášť.

Máme tedy

Věta 4.1 *Nechť* $\Omega\in C^{0,1}$ *je omezená oblast v* $\mathbb{R}^3$, $\gamma\ge\frac{5}{3}$, *(*$\gamma>\frac{3}{2}$ *pro* $\operatorname{rot}\boldsymbol{f}=0$*). Nechť* $\lambda+\frac{2}{3}\mu\ge0$,** $\mu>0$. *Nechť* $\boldsymbol{f}\in L^\infty(\Omega)$. *Potom pro úlohu (4.1)–(4.3) resp. (4.1)–(4.2), (4.4) existuje renormalizované slabé řešení s omezenou energií, přičemž* $\varrho\in L^{3(\gamma-1)}(\Omega)$, $\frac{3}{2}<\gamma<3$, $\varrho\in L^{2\gamma}(\Omega)$, $\gamma\ge3$.

Věta 4.2 *Nechť* $\Omega\in C^{0,1}$ *je omezená oblast v* $\mathbb{R}^2$, $\gamma>1$. *Nechť* $\lambda+\mu\ge0$, $\mu>0$. *Nechť* $\boldsymbol{f}\in L^\infty(\Omega)$. *Potom pro úlohu (4.1)–(4.3) resp. (4.1)–(4.2), (4.4) existuje renormalizované slabé řešení s omezenou energií, přičemž* $\varrho\in L^{2\gamma}(\Omega)$, $\gamma>1$.

**Pro homogenní Dirichletovy podmínky lze toto zeslabit, ne však pro podmínky smykové.

Pro vnější oblasti v $\mathbb{R}^3$ máme

Věta 4.3 *Nechť $\Omega \in C^{0,1}$ je vnější oblast v $\mathbb{R}^3$, $\gamma > 3$. Nechť $\lambda + \frac{2}{3}\mu \geq 0$, $\mu > 0$. Nechť $\boldsymbol{f} \in L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $\varrho_\infty \geq 0$. Potom pro úlohu (4.1)–(4.3) resp. (4.1)–(4.2), (4.4) existuje renormalizované slabé řešení s omezenou energií, přičemž $\varrho - \varrho_\infty \in L^3(\Omega) \cap L^{2\gamma}(\Omega)$.*

Důkaz poslední věty je možno nalézt v [Lions 1998] nebo lépe v knize [Novotný, Straškraba 2004].

Pro případ oblasti Ω s exity E_i, $1 \leq i \leq K \in \mathbb{N}$, je třeba modifikovat definici slabého řešení; jde především o energetickou nerovnost, kde se na pravé straně objevují nové členy. Uvažujeme pouze úlohu, kdy v jednotlivých exitech je předepsána limitní hustota (tj. rozdíl tlaků) a rychlost jde k nule. Zajímavý otevřený problém je, zda lze místo hustoty předepsat tok exitem.

Definice 4.4 (oblast s exity do nekonečna)
Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je lokálně lipschitzovská oblast s exity do nekonečna. Potom $(\varrho, \boldsymbol{v})$ je renormalizované slabé řešení s omezenou energií systému (4.1)–(4.3), jestliže

- $\varrho \in L^s_{loc}(\Omega)$ *pro jisté* $\gamma \leq s \leq \infty$
- $\varrho \geq 0$ *s.v. v* Ω
- $\varrho - \varrho_i \in L^r(E_i)$, $1 \leq r < \infty$, $i = 1, \dots, K$
- $\boldsymbol{v} \in D_0^{1,2}(\Omega)$
- *rovnice (4.1) je splněna ve smyslu Definice 4.1 (pro* $\lambda_1 = \frac{s}{2} - 1$*)*
- *bilance hybnosti je splněna ve smyslu distribucí na* Ω
- *je splněna energetická nerovnost*

$$\mu \int_\Omega |\nabla \boldsymbol{v}|^2 dx + (\mu + \lambda) \int_\Omega (\operatorname{div} \boldsymbol{v})^2 dx$$
$$\leq \int_\Omega \varrho \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} dx + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \sum_{i=1}^K (\varrho_1^{\gamma-1} - \varrho_i^{\gamma-1}) \Phi_i,$$

kde Φ_i jsou toky exity E_i dané

$$\Phi_i = \langle \gamma_{\boldsymbol{n}}(\varrho \boldsymbol{v}), \xi|_{\partial\Omega_2} \rangle$$

a $\xi = 1$ v exitu E_i kolem $\partial\Omega_2$, je nulová v ostatních exitech a má kompaktní nosič.[††]

Platí

Věta 4.4 *Nechť $\Omega \in C^{0,1}$ je oblast v $\mathbb{R}^3$ s K exity do nekonečna, které jsou konické nebo superkonické (tj. obsahují uvnitř kužel). Nechť $\lambda + \frac{2}{3}\mu \geq 0$, $\mu > 0$. Nechť $\boldsymbol{f} \in L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $\gamma > 3$, $\varrho_i \geq 0$. Potom pro úlohu (4.1)–(4.3) existuje renormalizované slabé řešení s omezenou energií podle Definice 4.4, přičemž $\varrho - \varrho_i \in L^3(E_i) \cap L^{2\gamma}(E_i)$.*

Důkaz, podobně jako pro vnější oblasti, je založen na vhodné aproximaci na omezených oblastech, které postupně vyplňují celou oblast. Je možno ho nalézt v [Novo et al. 2005], viz též [P8] (v [Novo, Novotný 2006] pouze pro exity ve tvaru kužele), hlavní kroky též v [Novotný, Straškraba 2004].

Pokud se exity neotevírají dostatečně rychle, řešení nemusí existovat, jak je ukázáno v [Novo et al. 2005], viz též [P8].

V nedávné době bylo, díky apriorním odhadům

$$\int_\Omega \frac{p(\varrho(y))}{|x-y|} dy$$

dosaženo pokroku i pro γ nižší, viz např. práce [Plotnikov, Sokolowski 2005], [Frehse, Goj, Steinhauer 2005] či [Březina 2007]. Jde ale zatím o apriorní odhady, bez důkazu existence řešení.

Zajímavou otázkou je problém regularity slabého řešení. Jak je ukázáno v [Lions 1998], je-li $\varrho = 0$ někde v Ω, pak lze nanejvýš očekávat, že $\varrho \in L^\infty(\Omega)$ a $\boldsymbol{v} \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Tamtéž je dokázáno, že pro Dirichletovu úlohu s $\gamma > 3$ ($N = 3$) resp. $\gamma > 1$ ($N = 2$) je výše zkonstruované řešení takové, že $\varrho \in L^\infty_{loc}(\Omega)$ a $\boldsymbol{v} \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ $\forall p < \infty$. Jak je ukázáno v [Mucha, Pokorný 2006], viz též [P9], ($N = 2$, $\gamma > 1$) a [Pokorný, Mucha 2007] ($N = 3$, $\gamma > 3$), pro případ smykových okrajových podmínek je možno zkonstruovat takové řešení, že výše uvedená hladkost platí až do hranice. Důkaz je založen na speciálním aproximačním schématu, který přímo dává hustotu stejnoměrně omezenou a není třeba uvažovat renormalizovanou rovnici kontinuity. Celý důkaz se tím dosti zjednodušuje. Jedním z výsledků, které se při důkazu využívají, je práce [Novo et al. 2001] (viz též [P7]), která se jinak zabývá problematikou související s aplikací Greenovy věty pro studium stacionární transportní rovnice.

[††]Takto komplikovaná definice je proto, že hustota nemá obecně stopu a je třeba brát stopu normálové složky celé hybnosti.

4.1.2 Silná řešení pro stacionární stlačitelné Navier–Stokesovy rovnice

První existenční výsledky pro stacionární stlačitelné Navier–Stokesovy rovnice se týkaly převážně Hilbertových prostorů, viz práce [Padula 1982], [Valli 1983], [Valli 1987], pro smykové okrajové podmínky pak [Farwig 1989].

Pro obecnější prostory potom pro systém (4.1)–(4.3) platí

Věta 4.5 *Nechť $m > 0$, $s > 3$, $k = 0, 1, \ldots$. Nechť $\boldsymbol{f} \in W^{k,s}(\Omega)$, $\Omega \in C^{k+3}$, $p \in C^1([0,\infty))$. Potom existují β_0 a $\beta_1 > 0$ taková, že pro $\|\boldsymbol{f}\|_{k,s} \leq \beta_0$ existuje jediné silné řešení systému (4.1)–(4.3) ($\varrho = \frac{m}{|\Omega|} + \sigma, \boldsymbol{v}$) v kouli $\|\tau\|_{k+1,s} + \|\boldsymbol{w}\|_{k+2,s} \leq \beta_1$ splňující $\sigma \in W^{k+1,s}(\Omega)$ a $\boldsymbol{v} \in W^{k+2,s}(\Omega) \cap W_0^{1,s}(\Omega)$.*

Věta bylo dokázana v práci [Beirão da Veiga 1987]; pomocí metody dekompozice je důkaz proveden v knize [Novotný, Straškraba 2004].

Ta bylo poprvé použita v práci [Novotný, Padula 1994] a úspěšně použita pro řešení úloh na vnějších oblastech. V těchto úlohách je třeba navíc předepsat chování rychlosti a hustoty v nekonečnu. Asymptotické chování pro nulovou a nenulovou rychlost v nekonečnu se liší, což souvisí s vlastnostmi Stokesovy/Oseenovy linearizace na vnějších oblastech, viz Část 3.2.1. Řešení se nazývá fyzikálně rozumné, jestliže se asymptoticky chová jako fundamentální řešení Stokesova/Oseenova problému, podrobněji viz [Galdi 1994a], [Galdi 1994b] nebo [Kračmar et al. 2001] či [Pokorný 1999]. V případě nenulové předepsané rychlosti v nekonečnu je chování anizotropní, za obtékaným tělesem vzniká úplav.

Metoda dekompozice byla úspěšně použita v [Novotný, Padula 1994] (existence silných a fyzikálně rozumných řešení je tam dokázána pro $\boldsymbol{v}_\infty = \boldsymbol{0}$, $N = 3$), [Novotný, Padula 1997] (existence silných a fyzikálně rozumných řešení pro $\boldsymbol{v}_\infty \neq \boldsymbol{0}$, $N = 3$), [Galdi, Novotný, Padula 1997] (existence silných řešení pro $\boldsymbol{v}_\infty \neq \boldsymbol{0}$, $N = 2$) a [Dutto, Novotný 2001] (existence fyzikálně rozumných řešení pro $\boldsymbol{v}_\infty \neq \boldsymbol{0}$, $N = 2$). Přesné formulace výsledků a důkazy lze pro trojdimenzionální oblasti nalézt též v [Novotný, Straškraba 2004].

4.2 Evoluční stlačitelné Navier–Stokesovy rovnice

Také zde byly první globální existenční výsledky dokázány za předpokladu malých dat. Teprve díky [Lions 1998] byla poprvé představena metoda, jak přistupovat ke globálním slabým řešením pro evoluční problém. Některé detaily bylo třeba upřesnit, což se zejména díky E. Feireislovi úspěšně podařilo, a dnes je převážná většina prací v tomto oboru zaměřena na slabá řešení pro libovolně velká data.

Budeme se tedy zabývat systémem (pro jednoduchost v celé sekci uvažujeme pouze homogenní Dirichletovy podmínky)

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \boldsymbol{v}) = 0 \quad \text{v } (0,T) \times \Omega, \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial(\varrho \boldsymbol{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}) - 2\mu \operatorname{div} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}) - \lambda \nabla \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \nabla p(\varrho) = \varrho \boldsymbol{f} \quad \text{v } (0,T) \times \Omega, \tag{4.7}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \quad \text{na } (0,T) \times \partial\Omega, \tag{4.8}$$

$$\varrho(0,x) = \varrho_0(x), \qquad (\varrho \boldsymbol{v})(0,x) = \boldsymbol{q}_0(x), \tag{4.9}$$

popřípadě

$$\boldsymbol{v} \to \boldsymbol{v}_\infty, \qquad \varrho \to \varrho_\infty \quad \text{pro } |x| \to \infty, \tag{4.10}$$

je-li Ω neomezená.

4.2.1 Slabá řešení pro evoluční stlačitelné Navier–Stokesovy rovnice

Hlavní myšlenka slabé formulace je analogická stacionárnímu případu. Nejprve definujme pojem renormalizované rovnice kontinuity.

Definice 4.5 *Dvojice $(\varrho, \boldsymbol{v})$ je renormalizované řešení rovnice kontinuity, jestliže po prodloužení nulou vně Ω, $(\varrho, \boldsymbol{v})$ řeší*

$$\frac{\partial b(\varrho)}{\partial t} + \operatorname{div}(b(\varrho)\boldsymbol{v}) + (\varrho b'(\varrho) - b(\varrho)) \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \tag{4.11}$$

pro každou funkci $b(\cdot) \in C^1((0,\infty) \cap C([0,\infty))$ takovou, že $|b'(t)| \leq ct^{-\lambda_0}$, $t \in (0,1]$, $\lambda_0 < 1$, $|b'(t)| \leq Ct_1^{\lambda}$, $t \geq 1$, $\lambda_1 \leq \frac{\beta}{2} - 1$, $\beta \geq 2$.

Položme dále $P(\varrho) = \varrho \int_1^\varrho \frac{p(s)}{s^2} ds + c_0 \varrho$, kde $c_0 \in \mathbb{R}$ je zvoleno tak, aby $P(\varrho) \geq 0$.

Definice 4.6 *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N = 2,3$, je omezená lipschitzovská oblast. Nechť $P(\varrho_0) \in L^1(\Omega)$, $\varrho_0 \geq 0$ s.v. v Ω, $\boldsymbol{q}_0 \in L^1(\Omega)$ takové, že $\frac{|\boldsymbol{q}_0|^2}{\varrho_0} 1_{\{\varrho_0 > 0\}} \in L^1(\Omega)$, $\boldsymbol{q}_0 = \boldsymbol{0}$ v $\{x \in \Omega; \varrho_0(x) = 0\}$. Nechť $\boldsymbol{f} \in L^1((0,T); L^{\gamma'}(\Omega)) \cap L^2((0,T); L^{\frac{6\gamma}{5\gamma-6}}(\Omega)) \cap L^2((0,T); L^{\frac{6}{5}}(\Omega))$. Potom $(\varrho, \boldsymbol{v})$ je renormalizované slabé řešení s omezenou (konečnou) energií systému (4.6)–(4.9), jestliže*

- $\varrho \in L^s((0,T); L^s_{loc}(\Omega))$ *pro jisté* $\gamma \leq s \leq \infty$
- $P(\varrho) \in L^\infty((0,T); L^1(\Omega))$
- $\varrho \geq 0$ *s.v. v* $(0,T) \times \Omega$
- $\boldsymbol{v} \in L^2((0,T); W^{1,2}_0(\Omega))$
- $\varrho|\boldsymbol{v}|^2 \in L^\infty((0,T); L^1(\Omega))$
- *rovnice (4.6) je splněna ve smyslu Definice 4.5 (pro* $\beta = \gamma$*)*
- *bilance hybnosti je splněna ve smyslu distribucí na* $(0,T) \times \Omega$
- *platí*

$$\lim_{t\to 0^+} \int_\Omega \varrho(t)\psi dx = \int_\Omega \varrho_0 \psi dx \quad \forall \psi \in C^\infty_0(\Omega)$$
$$\lim_{t\to 0^+} \int_\Omega (\varrho\boldsymbol{v})(t) \cdot \boldsymbol{\varphi} dx = \int_\Omega \boldsymbol{q}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi} dx \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in C^\infty_0(\Omega)$$

- *je splněna energetická nerovnost v diferenciálním tvaru (řešení s konečnou energií)*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(\varrho, \boldsymbol{q}) + \mu \int_\Omega |\nabla \boldsymbol{v}|^2 dx + (\mu + \lambda) \int_\Omega (\operatorname{div} \boldsymbol{v})^2 dx \leq \int_\Omega \varrho \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} dx$$

ve smyslu distribucí na $(0,T)$

nebo, pro řešení s omezenou energií, je splněna energetická nerovnost v integrálním tvaru

- $$\mathcal{E}(\varrho(t), \boldsymbol{q}(t)) + \mu \int_0^t \int_\Omega |\nabla \boldsymbol{v}|^2 dx d\tau + (\mu + \lambda) \int_0^t \int_\Omega (\operatorname{div} \boldsymbol{v})^2 dx d\tau$$
$$\leq \mathcal{E}(\varrho_0, \boldsymbol{q}_0) + \int_0^t \int_\Omega \varrho \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} dx d\tau$$

s.v. na $(0,T)$,

kde $\mathcal{E}(\varrho, \boldsymbol{q}) = \int_\Omega (\frac{1}{2}\varrho|\boldsymbol{v}|^2 + P(\varrho))dx$, $\boldsymbol{q} = \varrho\boldsymbol{v}$.

Pro vnější oblast Ω jsou změny analogické, jako pro případ stacionární (tj. $\boldsymbol{v} \in L^2((0,T); D_0^{1,2}(\Omega))$, $\boldsymbol{f} \in L^1((0,T); L^{\gamma'}_{loc}(\overline{\Omega}))$.

(Pro smykové okrajové podmínky bychom mohli též provést analogické úpravy jako pro stacionární případ.)

První výsledek v tomto smyslu byl dosažen pro $\gamma \geq \frac{9}{5}$ v [Lions 1998]. Později na základě výsledků E. Feireisla (viz [Feireisl 2001]) bylo v práci [Feireisl et al. 2001] ukázáno, že řešení existuje pro $\gamma > \frac{3}{2}$. Pro Ω omezenou tedy platí:

Věta 4.6 *Nechť* $\Omega \in C^{2,\theta}$, $\theta \in (0,1]$, $\boldsymbol{f} \in L^\infty((0,T) \times \Omega)$, $\boldsymbol{q}_0 \in L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega)$, $\boldsymbol{q}_0 1_{\{\varrho_0 = 0\}} = 0$ *s.v. v* Ω, $\frac{|\boldsymbol{q}_0|^2}{\varrho_0} 1_{\{\varrho_0 > 0\}} \in L^1(\Omega)$, $p(\varrho) = \varrho^\gamma$, $\gamma > \frac{3}{2}$, $\mu > 0$, $\lambda + \frac{2}{3}\mu \geq 0$. *Potom existuje renormalizované slabé řešení s omezenou i konečnou energií podle Definice 4.6 takové, že*

- $\varrho \in L^\infty((0,T); L^\gamma(\Omega)) \cap L^{\frac{5\gamma-3}{3}}((0,T) \times \Omega)$
- $\varrho \in C([0,T]; L^\gamma_w(\Omega)) \cap C([0,T]; L^p(\Omega))$, $1 \leq p < \gamma$
- $\varrho \geq 0$ *s.v. na* $(0,T) \times \Omega$
- $\boldsymbol{v} \in L^2((0,T); W_0^{1,2}(\Omega))$
- $\varrho \boldsymbol{v} \in C([0,T]; L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega))$
- $\varrho |\boldsymbol{v}|^2 \in L^\infty((0,T); L^1(\Omega)) \cap L^2((0,T); L^{\frac{6\gamma}{4\gamma+3}}(\Omega))$.

Pro případ vnější oblasti lze dokázat analogické tvrzení. Pouze, řešení je s omezenou energií, nikoliv konečnou (tj. obecně není zřejmá energetická nerovnost v diferenciálním tvaru). Kromě výše zmíněných prací lze důkaz obou výsledků nalézt v [Novotný, Straškraba 2004]; stejně tak i návod pro důkaz existence pro smykové okrajové podmínky.

Lze podstatně zeslabit podmínky na hladkost Ω (viz [Feireisl 2001]) i na tlak (nemusí být ani monotónní, stačí asymptotický růst jako ϱ^γ, viz [Feireisl 2002]). Případ nehomogenní Dirichletovy podmínky byl studován v [Feireisl 2003b] a [Novo 2005].

Analogické výsledky lze dokázat pro $\gamma > 1$ (původní Lionsův důkaz byl pro $\gamma \geq \frac{3}{2}$) pro $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, viz [Feireisl et al. 2001]. Pro případ sférické symetrie v $\mathbb{R}^3$ lze pak existenci řešení dokázat pro $\gamma > 1$, viz [Jiang, Zhang 2001].

Pro případ potenciální síly $\boldsymbol{f} = \nabla\Phi$, Φ nezávislé na čase, je zajímavá otázka, zda řešení konverguje ke klidovému řešení Navier–Stokesových rovnic, tj. k $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ a k ϱ, řešení

$$\nabla p(\varrho) = \varrho \nabla \Phi. \tag{4.12}$$

Rovnice (4.12), zejména jeho jednoznačnost pro danou hmotu popř. energii byl studován v pracech [Feireisl, Petzeltová 1998], [Erban 2001] a pro speciální případ Ω vnější oblast a $\varrho_\infty > 0$ v práci [Novotný, Pokorný 2007]. Jednoznačnost řešení má úzký vztah k souvislosti množin $\{x \in \Omega; \Phi(x) > k\}$, $k \in \mathbb{R}$.

Stabilizace, tj. konvergence hustoty k řešení (4.12) a hybnosti (kinetické energie) k nule, byla studována pro Ω omezenou a různé okrajové podmínky v [Novotný, Straškraba 2000] a [Novotný, Straškraba 2001], jinou technikou pro Ω omezenou nebo vnější oblast s $\varrho_\infty = 0$ v [Feireisl, Petzeltová 1999] a pro Ω vnější oblast s $\varrho_\infty > 0$ v [Novotný, Pokorný 2007]; všechny výsledky se týkají tří prostorových dimenzí.

O něco jednodušší je situace pro jednu prostorovou dimenzi, kde je existence slabých řešení pro libovolná data známa již delší dobu a stabilizace je relativně dobře prozkoumaná, včetně rychlosti konvergence, viz např. články [Straškraba, Valli 1988], [Straškraba 1997], [Penel, Straškraba 2003], [Straškraba, Zlotnik 2002].

Na závěr této části jen stručně zmiňme, že pro obecné síly byly asymptotické vlastnosti studovány v [Feireisl 2003a] (existence atraktoru a globálního atraktoru pro lokální trajektorie) a v práci [Feireisl et al. 1999] byla dokázána existence časově periodických řešení.

4.2.2 Silná řešení pro evoluční Navier–Stokesovy rovnice (malá data)

Pokud se týká existence globálního silného řešení stlačitelných Navier–Stokesových rovnic, prvním výsledkem (též pro úplný systém (2.25)–(2.27)) byla práce [Matsumura, Nishida 1979] resp. [Matsumura, Nishida 1980] pro Cauchyovu úlohu. My zde ocitujeme výsledek z [Novotný, Straškraba 2004]:

Věta 4.7 *Nechť $p \in C^1([0,\infty))$, $p' > 0$ na $(0,\infty)$. Nechť $\Omega \in C^{2,\theta}$, $\theta \in (0,1]$. Nechť $r \in [2,\infty)$, $q \in (3,\infty)$ a $\boldsymbol{v}_0 \in W^{2(1-\frac{1}{r}),r}(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega) \equiv V_{\boldsymbol{v}}$, $\varrho_0 \in W^{1-\frac{1}{r},q}(\Omega) \equiv V_\varrho$. Potom existuje $\delta_0 > 0$ takové, že pro $\|\boldsymbol{v}_0, \varrho_0 - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \varrho_0\|_{V_{\boldsymbol{v}} \times V_\varrho} < \delta_0$ existuje globální řešení $(\boldsymbol{v}, \varrho)$ splňující podmínku, že rychlost $\boldsymbol{v}$ patří do $W^{1,r}((0,T); L^q(\Omega))$ a také $\boldsymbol{v} \in L^r((0,T); W^{2,q}(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega))$ a $\varrho \in W^{1,r}((0,T); L^q(\Omega)) \cap L^r((0,T); W^{1,q}(\Omega))$.*

Podobné výsledky lze najít např. v [Valli 1983], [Salvi, Straškraba 1993], [Mucha, Zajączkowski 2002]. Nehomogenní Dirichletova podmínka byla studována v [Valli, Zajączkowski 1986]. Fyzikálně zajímavá problematika nespojitých počátečních dat byla studována např. v [Hoff 1997].

Na závěr zmiňme ještě výsledek [Vaigant 1994], kde autor pro exponent $\gamma \in (1, \frac{N}{N-1})$ a $\gamma > N$ konstruuje počáteční podmínky a sílu takové, že příslušné jediné sféricky symetrické řešení má blow-up v konečném čase v L^∞ normě.

5 Literatura

[Agmon et al. 1964] Agmon, S.; Douglis, A. a Nirenberg, L.: *Estimates near boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II*, Comm. Pure Appl. Math. **17** (1964) 35–92.

[Amann 1995] Amann, H.: *Heat-conducting incompressible viscous fluids*, v: **Navier-Stokes equations and related nonlinear problems** (Funchal, 1994), Plenum, New York, 1995, 231–243.

[Amann 2003] Amann, H.: *Navier-Stokes equations with nonhomogeneous Dirichlet data*, J. Nonlinear Math. Phys. **10**, suppl. 1 (2003) 1–11.

[Bae, Chae 1997] Bae, H.O. a Choe, H.J.: *L^∞-bound of weak solutions to Navier-Stokes equations*, v: **Proceedings of Korea-Japan partial differential equations conference, Taejon, Republic of Korea, December 16–18, 1996**, ed. Choe, Hi Jun et al., Korea: Seoul National University, Lect. Notes Ser., Seoul. 39, No.1, 1997, 13 stran.

[Batchelor 1967] Batchelor, G.K.: **An introduction to fluid dynamics**, Cambridge University Press, Cambridge, 1967.

[Beirão da Veiga 1987] Beirão da Veiga, H.: *An L^p–theory for the n dimensional, stationary compressible Navier–Stokes equations, and incompressible limit for compressible fluids. The equilibrium solutions*, Comm. Math. Phys. **109** (1987) 229–248.

[Beirão da Veiga 1995] Beirão da Veiga, H.: *A new regularity class for the Navier–Stokes equations in R^n*, Chin. Ann. Math. Ser. B 16 (1995) 407–412.

[Berselli, Beirão da Veiga 2002] Beirão da Veiga, H. a Berselli, L.: *On the regularizing effect of the vorticity direction in incompressible viscous flows*, Differential Integral Equations **15**, No. 3 (2002) 345–356.

[Berselli, Galdi 2002] Berselli, L. a Galdi, G.P.: *Regularity criteria involving the pressure for the weak solutions to the Navier-Stokes equations*, Proc. Am. Math. Soc. **130**, No. 12 (2002) 3585–3595.

[Bogovskij 1980] Bogovskij, M.E.: *Solutions of some vector analysis problems connected with operators div and grad*, Trudy Seminara S.L. Soboleva, Akad. Nauk Novossibirsk **80**, No. 1 (1980) 5–40.

[Březina 2007] Březina, J.: doktorská práce MFF UK Praha, v přípravě.

[Bulíček 2006] Bulíček, M.: *Navier's Slip and Evolutionary Navier–Stokes–Fourier–Like Systems with Pressure, Shear–Rate and Temperature Dependent Viscosity*, doktorská práce, MFF UK Praha (2006).

[Caffarelli et al. 1982] Caffarelli, L.; Kohn, R. a Nirenberg, L.:*Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations*, Commun. Pure Appl. Math. **35** (1982) 771–831.

[Cannone 1995] Cannone, M.: **Ondelettes, paraproduits et Navier-Stokes**, Diderot Editeur, Paris, 1995.

[Chae, Lee 2002] Chae, D. a Lee, J.: *On the Regularity of Axisymmetric Solutions to the Navier–Stokes Equations*, Math. Z. **239** (2002) 645–671.

[Chae, Choe 1999] Chae, D. a Choe, H.J.: *Regularity of solutions to the Navier–Stokes equation*, Electron. J. Differ. Equ. **5** (1999), 1–7.

[Chorin 1994] Chorin, A.J.: **Vorticity and turbulence**, Applied Mathematical Sciences, **103**, Springer-Verlag, New York, 1994.

[Constantin 2001] Constantin, P.: *An Eulerian-Lagrangian approach to the Navier-Stokes equations*, Comm. Math. Phys. **216**, No. 3 (2001) 663–686.

[Constantin, Fefferman 1993] Constantin, P. a Fefferman, C.: *Direction of vorticity and the problem of global regularity for the Navier-Stokes equations*, Indiana Univ. Math. J. **42**, No. 3 (1993) 775–789.

[Constantin, Foias 1988] Constantin, P. a Foias, C.: **Navier–Stokes equations**, The University Chicago Press, Chicago & Oxford, 1988.

[DiPerna, Lions 1989] DiPerna, R.J. a Lions, P.L.:*Ordinary differential equations, Sobolev spaces and transport theory*, Invent. Math. **98**, No. 3 (1989) 511–547.

[Dutto, Novotný 2001] Dutto, P. a Novotný, A.: *Physically reasonable solutions to steady compressible Navier–Stokes equations in 2d exterior domains with nonzero velocity at infinity*, J. Math. Fluid Mech. **3** (2001) 99–138.

[Erban 2001] Erban, R.: *On steady static-limit solutions to the Navier–Stokes equations of compressible flow*, Jour. Math. Fluid Mech. **3** (2001) 393–408.

[Escauriaza et al. 2003] Escauriaza, L.; Seregin, G. a Šverák, V.: *Backward uniqueness for parabolic equations*, Arch. Ration. Mech. Anal. **169**, No. 2 (2003) 147–157.

[Escauriaza et al. 2004] Escauriaza, L.; Seregin, G. a Šverák, V.: *Backward uniqueness for the heat operator in a half-space*, St. Petersbg. Math. J. **15**, No. 1 (2004) 139–148.

[Farwig 1989] Farwig, R.: *Stationary solutions of the Navier–Stokes equations with slip boundary equations*, Commun. Partial Diff. Equations **14** (1989) 1579–1606.

[Farwig, Galdi, Sohr 2005] Farwig, R.; Galdi, G.P. a Sohr, H.: *Very weak solutions of stationary and instationary Navier-Stokes equations with nonhomogeneous data*, v: **Nonlinear elliptic and parabolic problems**, Birkhäuser, Basel, 2005, 113–136.

[Farwig, Galdi, Sohr 2006] Farwig, R.; Galdi, G.P. a Sohr, H.: *Local in time regularity properties of the Navier–Stokes equations beyond Serrin's condition*, preprint TU Darmstadt, č. 2465 (2006).

[Feireisl 2001] Feireisl, E.: *On compactness of solutions to the isentropic Navier–Stokes equations when the density is not square integrable*, Comment. Math. Univ. Carolinae **42**, No. 1 (2001) 83–98.

[Feireisl 2002] Feireisl, E.: *Compressible Navier–Stokes equations when the density is not square integrable*, J. Diff. Equations **184** (2002) 97–108.

[Feireisl 2003a] Feireisl, E.: *Propagation of osciallations, complete trajectories and attractors for compressible flows*, Nonlinear Differ. Equ. Appl. **10** (2003) 33–55.

[Feireisl 2003b] Feireisl, E.: *Shape optimization in viscous compressible fluids*, Appl. Math. and Optimization **47** (2003) 59–78.

[Feireisl 2004] Feireisl, E.: **Dynamics of viscous compressible fluids**, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 26, Oxford University Press, Oxford, 2004.

[Feireisl, Málek 2006] Feireisl, E. a Málek, J.: *On the Navier–Stokes equations with temperature dependent transport coefficients*, Diff. Equa. Nonlinear Mech. (2006) 14 stran (elektronicky).

[Feireisl et al. 1999] Feireisl, E.; Matušů–Nečasová, Š.; Petzeltová, H. a Straškraba, I.: *On the motion of a viscous fluid driven by a time–periodic external force*, Arch. Rat. Mech. Anal. **149** (1999) 69–96.

[Feireisl, Novotný 2005] Feireisl, E. a Novotný, A.: *On a simple model of reacting compressible flows arising in astrophysics*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **135**, No. 6 (2005) 1169–1194.

[Feireisl, Novotný 2006] Feireisl, E. a Novotný, A.: *Large time behaviour of flows of compressible, viscous, and heat conducting fluids*, Math. Methods Appl. Sci. **29**, No. 11 (2006) 1237–1260.

[Feireisl, Novotný 2007] Feireisl, E. a Novotný, A.: *On the low Mach number limit for the full Navier–Stokes–Fourier system*, přijato do Arch. Rat. Mech. Anal.

[Feireisl et al. 2001] Feireisl, E.; Novotný, A. a Petzeltová, H.: *On the existence of globally defined weak solutions to the Navier–Stokes equations of compressible isentropic fluids*, J. Math. Fluid Mech. **3** (2001) 358–392.

[Feireisl et al. 2005] Feireisl, E.; Novotný, A. a Petzeltová, H.: *On a class of physically admissible variational solutions to the Navier-Stokes-Fourier system.*, Z. Anal. Anwendungen **24**, No. 1 (2005) 75–101.

[Feireisl, Petzeltová 1998] Feireisl, E. a Petzeltová, H.: *On the steady state solutions to the Navier–Stokes equations of compressible flow*, Manuscripta Math. **97** (1998) 109–116.

[Feireisl, Petzeltová 1999] Feireisl, E. a Petzeltová, H.: *Large time behaviour of solutions to the Navier–Stokes equations of compressible flow*, Arch. Rational Mech. Anal. **150** (1999) 77–96.

[Frehse, Růžička 1995] Frehse, J. a Růžička, M.: *Existence of regular solutions to the stationary Navier-Stokes equations*, Math. Ann. **302**, No. 4 (1995) 699–717.

[Frehse, Růžička 1997] Frehse, J. a Růžička, M.: *Existence of regular solutions to the steady Navier-Stokes equations in bounded six-dimensional domains*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **23**, No. 4 (1997) 701–719.

[Frehse, Goj, Steinhauer 2005] Frehse, J.; Goj, S. a Steinhauer, M.: *L^p–estimates for the Navier–Stokes equations for steady compressible flow*, Manuscripta Math. **116**, No. 3 (2005) 265–275.

[Galdi 1994a] Galdi, G.P.: **An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations I**, Springer Tracts in Natural Philosophy, Vol. **38**, Springer Verlag, New York, 1994.

[Galdi 1994b] Galdi, G.P.: **An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations II**, Springer Tracts in Natural Philosophy, Vol. **39**, Springer Verlag, New York, 1994.

[Galdi 2000] Galdi, G.P.: *An introduction to the Navier–Stokes initial–boundary value problem*, v: **Fundamental directions in mathematical fluid mechanics, Advances in mathematical fluid mechanics**, Vol. **1**, Birhäuser Verlag, Basel, 2000, 1–70.

[Galdi, Novotný, Padula 1997] Galdi, P.; Novotný, A.; Padula, M.: *On the two-dimensional steady-state problem of a viscous gas in an exterior domain*, Pacific J. Math. **179**, No. 1 (1997) 65–100.

[Gerhardt 1979] Gerhardt, C.: *Stationary solutions to the Navier-Stokes equations in dimension four*, Math. Z. **165**, No. 2 (1979) 193–197.

[Giga, Sohr 1991] Giga, Y. a Sohr, H.: *Abstract L^p estimates for the Cauchy problem with applications to the Navier-Stokes equations in exterior domains*, J. Funct. Anal. **102**, No. 1 (1991) 72–94.

[Gurtin 1981] Gurtin, M.E.: **An Introduction to Continuum Mechanics**, Academic Press, 1981.

[Heywood 1976] Heywood, J.G.: *On uniqueness questions in the theory of viscous flow*, Acta Math. **136**, No. 1–2 (1976) 61–102.

[Heywood 1980] Heywood, J.G.: *The Navier–Stokes equations: On the existence, uniqueness and decay of solutions*, Indiana Univ. Math. J. **29** (1980) 639–681.

[Hoff 1997] Hoff, D.: *Discontinuous solutions of the Navier–Stokes equations for multidimensional heat–conducting flows*, Arch. Rat. Mech. Anal. **139** (1997) 303–354.

[Hopf 1941] Hopf, E.: *Ein allgemeiner Endlichkeitssatz der Hydrodynamik*, Math. Ann. **117** (1941) 764–775.

[Hopf 1951] Hopf, E.: *Über die Anfangswertaufgabe für die Hydrodynamischen Gleichungen*, Math. Nachrichten **4** (1951) 213–231.

[Jiang, Zhang 2001] Jiang, P. a Zhang, P.:*On spherically symmetric solutions of the compressible isentropic Navier–Stokes equations*, Commun. Math. Phys. **215** (2001) 255–276.

[Judovič 1967] Judovič, V.I.: *An example of the loss of stability and the generation of a secondary flow of a fluid in a closed container*, Mat. Sb. (N.S.) **74** (1967) 565–579.

[Koch, Solonnikov 2001] Koch, H. a Solonnikov, V.A.: *L_p-estimates for a solution to the nonstationary Stokes equations*, Function theory and phase transitions. J. Math. Sci. (New York) **106**, No. 3 (2001) 3042–3072.

[Kozono, Sohr 1996] Kozono, H. a Sohr, H.: *Remark on uniqueness of weak solutions to the Navier–Stokes equations*, Analysis **16** (1996) 255–271.

[Kračmar et al. 2001] Kračmar, S.; Novotný, A. a Pokorný, M.: *Estimates of Oseen kernels in weighted L^p spaces*, Journal of Mathematical Society of Japan **53**, No. 1 (2001) 59–111.

[Kreml, Pokorný 2007] Kreml, O. a Pokorný, M. *A regularity criterion for the angular velocity component in the case of axisymmetric Navier–Stokes equations*, zasláno k publikaci.

[Kukavica, Ziane 2006] Kukavica, I. a Ziane, M.: *One component regularity for the Navier-Stokes equations*, Nonlinearity **19**, No. 2 (2006) 453–469.

[Ladyženskaja 1959] Ladyzhenskaya, O.A.: *Uniqueness and smoothness of generalized solutions of the Navier–Stokes equations*, Comm. on Pure Appl. Math. **12** (1959) 427–433.

[Ladyženskaja 1968] Ladyzhenskaya, O.A.: *On the unique global solvability to the Cauchy problem for the Navier–Stokes equations in the presence of the axial symmetry*, Zapisky Naucnych seminarov LOMI, **7** (1968) 155–177.

[Ladyženskaja 1969] Ladyzhenskaya, O.A.: **The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Fluid**, Gordon and Breach 1969.

[Ladyženskaja 1972] Ladyzhenskaya, O.A.: *The dynamical system that is generated by the Navier-Stokes equations*, Boundary value problems of mathematical physics and related questions in the theory of functions, 6. Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) **27** (1972) 91–115.

[Ladyženskaja, Seregin 1999] Ladyzhenskaya, O. A. a Seregin, G.A.: *On partial regularity of suitable weak solutions to the three-dimensional Navier-Stokes equations*, J. Math. Fluid Mech. **1**, No. 4 (1999) 356–387.

[Lemarié–Rieusset 2002] Lemarié-Rieusset, P.G.: **Recent developments in the Navier-Stokes problem**, Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics, 431, Boca Raton, FL, 2002.

[Leonardi et al. 1999] Leonardi, S.; Málek, J.; Nečas, J. a Pokorný, M.: *On axially symmetric flows in* $\mathbb{R}^3$, Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen **18** (1999) 639–649.

[Leray 1933] Leray, J.: *Etude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique*, J. Math. Pures Appl. IX. Ser. 12 (1933) 1–82.

[Leray 1934] Leray, J.: *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace*, Acta Math. **63** (1934) 193–248.

[Lin 1998] Lin, F.: *A new proof of the Caffarelli–Kohn–Nirenberg theorem*, Comm. on Pure and Appl. Math. **51** (1998) 241–257.

[Lions 1996] Lions, P.L.: **Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Vol. 1: Incompressible Models**, Oxford Science Publications, 1996.

[Lions 1998] Lions, P.L.: **Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Vol. 2: Compressible Models**, Oxford Science Publications, 1998.

[Málek et al. 1999] Málek, J.; Nečas, J.; Pokorný, M. a Schonbek, M.E.: *On possible singular solutions to the Navier–Stokes equations*, Math. Nach. **199** (1999), 97–114.

[Málek, Rajagopal 2005] Málek, J. a Rajagopal, K.R.: *Mathematical issues concerning the Navier–Stokes equations and some of their generalizations*, v: **Handbook of evolutionary PDE's, Vol. II**, Elsevier, eds.: C. Dafermos, E. Feireisl, 2005, 371–460.

[Matsumura, Nishida 1979] Matsumura, A. a Nishida, T.: *The initial value problem for the equations of motion of a viscous and heat-conducting gases*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **55** (1979) 337–342.

[Matsumura, Nishida 1980] Matsumura, A. a Nishida, T.: *The initial value problem for the equations of motion of a viscous and heat-conducting gases*, J. Math. Kyoto Univ. **20** (1980) 67–104.

[Maršík 1999] Maršík, F.: **Termodynamika kontinua**, Academia Praha, 1999.

[Montgomery–Smith, Pokorný 2002] Montgomery-Smith, S. a Pokorný M.: *A counterexample to the smoothness of the solution to an equation arising in fluid mechanics*, Comment. Math. Univ. Carolinae **43**, No. 1 (2002) 61–75.

[Mucha, Pokorný 2006] Mucha, P.B. a Pokorný, M.: *On a new approach to the issue of existence and regularity for the steady compressible Navier–Stokes equations*, Nonlinearity **19**, No. 8 (2006) 1747–1768.

[Mucha, Zajączkowski 2002] Mucha, P.B. a Zajączkowski, W.: *Global existence of solutions of the Dirichlet problem for the compressible Navier–Stokes equations*, ZAMM Z. Angew. Math. Mech. **84**, No. 6 (2004) 417–424.

[Naumann 2005] Naumann, J.: *Existence of weak solutions to the equations of stationary motion of heat-conducting incompressible viscous fluids*, v: **Nonlinear elliptic and parabolic problems**, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., **64**, Birkhäuser, Basel, 2005, 373–390.

[Nečas et al. 1996] Nečas, J.; Růžička, M. a Šverák, V.: *On self–similar solutions of the Navier–Stokes equations*, Acta Math. **176**, No. 2 (1996) 283–294.

[Nečas, Neustupa 2002] Nečas, J. a Neustupa, J.: *New conditions for local regularity of a suitable weak solution to the Navier–Stokes equations*, J. Math. Fluid Mech. **4** (2002) 237–256.

[Neustupa et al. 2002] Neustupa, J.; Novotný, A. a Penel, P.: *An interior regularity of a weak solution to the Navier-Stokes equations in dependence on one component of velocity*, Topics in mathematical fluid mechanics, Quad. Mat. **10** (2002) 163–183.

[Neustupa, Penel 2001] Neustupa, J. a Penel, P.: *Anisotropic and geometric criteria for interior regularity of weak solutions to the 3D Navier–Stokes Equations*, v: **Mathematical Fluid Mechanics (Recent Results and Open Problems)**, eds. J. Neustupa, P. Penel, Advances in Mathematical Fluid Mechanics, Birkhäuser 2001, 239–267.

[Neustupa, Penel 2003] Neustupa, J. a Penel, P.: *The role of eigenvalues and eigenvectors of the symmetrized gradient of velocity in the theory of the Navier–Stokes equations*, C. R., Math., Acad. Sci. Paris **336**, No. 10 (2003) 805–810.

[Neustupa, Pokorný 2000] Neustupa, J. a Pokorný, M.: *An interior regularity criterion for an axially symmetric suitable weak solution to the Navier–Stokes equations*, Journal of Mathematical Fluid Mechanics **2**, No. 4 (2000) 381–399.

[Neustupa, Pokorný 2001] Neustupa, J. a Pokorný, M.: *Axisymmetric flow of Navier-Stokes fluid in the whole space with non-zero angular velocity component*, Math. Boh. **126**, No. 2 (2001) 469–481.

[Novo 2005] Novo, S.: *Compressible Navier-Stokes model with inflow-outflow boundary conditions*, J. Math. Fluid Mech. **7**, No. 4 (2005) 485–514.

[Novo, Novotný 2002] Novo, S. a Novotný, A.: *On the existence of weak s olutions to the steady compressible Navier-Stokes equations when the density is not square integrable*, J. Math. Kyoto Univ. **42**, No. 3 (2002) 531–550.

[Novo, Novotný 2005] Novo, S. a Novotný, A.: *A remark on the smoothness of bounded regions filled with a steady compressible and isentropic fluid*, Appl. Math. **50**, No. 4 (2005) 331–339.

[Novo, Novotný 2006] Novo, S. a Novotný, A.: *On the existence of weak solutions to the steady compressible Navier-Stokes equations in domains with conical outlets*, J. Math. Fluid Mech. **8**, No. 2 (2006) 187–210.

[Novo et al. 2001] Novo, S.; Novotný, A. a Pokorný, M.: *Some notes to the transport equation and to the Green formula*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **106** (2001) 65–76.

[Novo et al. 2005] Novo, S., Novotný, A. a Pokorný, M.: *Steady compressible Navier–Stokes equations in domains with non-compact boundaries*, Mathematical Methods in Applied Sciences **28** (2005) 1445–1479.

[Novotný, Padula 1994] Novotný, A. a Padula, M.: *L^p-approach to steady flows of viscous compressible fluids in exterior domains*, Arch. Rational Mech. Anal. **126**, No. 3 (1994) 243–297.

[Novotný, Padula 1997] Novotný, A. a Padula, M.: *Physically reasonable solutions to steady compressible Navier–Stokes equations in 3D–exterior domains ($v_\infty \neq 0$)*, Math. Ann. **370** (1997) 439–489.

[Novotný, Pokorný 2007] Novotný, A. a Pokorný, M.: *Stabilization to equilibria of compressible Navier–Stokes equations with infinite mass*, přijato do Computers & Mathematics with Applications.

[Novotný, Straškraba 2000] Novotný, A. a Straškraba, I.: *Stabilization of solutions to compressible Navier–Stokes equations*, J. Math. Kyoto Univ. **40**, No. 2 (2000) 217–245.

[Novotný, Straškraba 2001] Novotný, A. and Straškraba, I.: *Convergence to equilibria for compressible Navier–Stokes equations with large data*, Ann. di Mat. Pura ed Appl. **CLXXIX**, No. IV (2001) 263–287.

[Novotný, Straškraba 2004] Novotný, A. a Straškraba, I.: **Mathematical Theory of Compressible Flows**, Oxford Science Publications, 2004.

[Oseen 1927] Oseen, C.W.: **Neuere Methoden in der Hydrodynamik**, Leipzig, Akad. Verlagsgesellschaft M.B.H., 1927.

[Padula 1982] Padula, M.: *Existence and uniqueness for viscous steady compressible motions*, v: **Proc. Sem. Fis. Mat., Dinamica dei Fluidi e dei gaz ionizzati**, Trieste, 1982.

[Padula, Pokorný 2001] Padula, M. a Pokorný M.: *Stability and decay to zero of the L^2 norms of perturbations to a viscous compressible heat conductive fluid motion exterior to a ball*, J. Math. Fluid Mech. **3**, No. 4 (2001) 342–357.

[Penel, Pokorný 2004] Penel, P. a Pokorný, M.: *Some new regularity criteria for the Navier–Stokes equations containing the gradient of velocity*, Appl. Math. **49**, No. 5 (2004) 483–493.

[Penel, Straškraba 2003] Penel, P. a Straškraba, I.: *Global behaviour of one-dimensional compressible flows with vanishing viscosity near vacuums*, J. of Concrete and Applicable Math. **1**, No. 4 (2003) 1–17.

[Plotnikov, Sokolowski 2005] Plotnikov, P.I. a Sokolowski, J.: *Concentrations of stationary solutions to compressible Navier–Stokes equations*, Comm. Mat. Phys. **258**, No. 3 (2005) 567–608.

[Pokorný 1999] Pokorný, M.: *Asymptotic behaviour of solutions to certain PDE's describing the flow of fluids in unbounded domains*, doktorská práce MFF UK Praha & UTV Toulon, (1999).

[Pokorný 2002] Pokorný, M.: *A regularity criterion for the angular velocity component in the case of axisymmetric Navier-Stokes equations*, v: **Proceedings of the 4th European Congress on Elliptic and Parabolic Problems, Rolduc and Gaeta 2001**, World Scientific 2002, 233–242.

[Pokorný 2003] Pokorný, M.: *On the result of He concerning the smoothness of solutions to the Navier-Stokes equations*, Electron. J. Differ. Equ. **11** (2003) 1–8.

[Pokorný 2005] Pokorný, M.: *A short note on regularity criteria for the Navier-Stokes equations containing the velocity gradient*, v: **Regularity and other aspects of the Navier-Stokes equations**, Banach Center Publ., 70, Polish Acad. Sci., Warsaw, 2005, 199–207.

[Pokorný, Mucha 2007] Pokorný, M. a Mucha, P.B.: *3D steady compressible Navier–Stokes equations*, zasláno k publikaci.

[Ponce et al. 1994] Ponce, G.; Racke, R.; Sideris, T.C. a Titi, E.S.: *Global stability of large solutions to the* 3*D Navier-Stokes equations*, Comm. Math. Phys. **159**, No. 2 (1994) 329–341.

[Prodi 1959] Prodi, G.: *Un teorema di unicità per el equazioni di Navier–Stokes*, Ann. Mat. Pura Appl. **48** (1959) 173–182.

[Raguel, Sell 1993] Raugel, G. a Sell, G.R.: *Navier-Stokes equations on thin* 3*D domains. I. Global attractors and global regularity of solutions*, J. Amer. Math. Soc. **6**, No. 3 (1993) 503–568.

[Rajagopal, Srinivasa 2000] Rajagopal, K.R. a Srinivasa, A.R.: *A thermodynamical framework for rate type fluid models*, J. Non-Newt. Fluid Mech. **88** (2000) 207–227.

[Salvi, Straškraba 1993] Salvi, R. a Straškraba, I.: *Global existence for viscous compressible fluids and their behaviour as* $t \to \infty$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Section IA Mathematics **40**, No. 1 (1993) 17–52.

[Scheffer 1977] Scheffer, V.: *Hausdorff measure and the Navier–Stokes equations*, Comm. Math. Phys. **55** (1977) 97–112.

[Schonbek 1985] Schonbek, M.E.: *L^2 decay for weak solutions of the Navier-Stokes equations*, Arch. Rational Mech. Anal. **88**, No. 3 (1985) 209–222.

[Sell 1996] Sell, G.R.: *Global attractors for the three-dimensional Navier-Stokes equations*, J. Dynam. Differential Equations **8**, No. 1 (1996) 1–33.

[Sell, You 2002] Sell, G.R. a You, Y.: **Dynamics of evolutionary equations**, Applied Mathematical Sciences, 143, Springer-Verlag, New York, 2002.

[Seregin, Shilkin, Solonnikov 2005] Seregin, G.A.; Shilkin, T.N. a Solonnikov, V.A.: *Boundary partial regularity for the Navier-Stokes equations*, Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) **310** (2004), Kraev. Zadachi Mat. Fiz. i Smezh. Vopr. Teor. Funkts. **34**, 158–190, 228; angl. překlad v J. Math. Sci. (N. Y.) **132**, No. 3 (2006) 339–358.

[Seregin, Šverák 2002] Seregin, G. a Šverák, V.: *Navier-Stokes with lower bounds on the pressure*, Arch. Ration. Mech. Anal. **163** (2002) 65–86.

[Serrin 1963] Serrin, J.: *The initial value problems for the Navier–Stokes equations*, v: **Nonlinear Problems**, ed. R.E. Langer, University of Wisconsin Press, 1963, 69–98.

[Šilhavý 1997] Šilhavý, M.: **The Mechanics and Thermodynamics of Continuum Media**, Springer Verlag, 1997.

[Solonnikov 1964] Solonnikov, V.A.: *Estimates for solutions of a non-stationary linearized system of Navier-Stokes equations*, Trudy Mat. Inst. Steklov. **70** (1964) 213–317.

[Straškraba 1997] Straškraba, I.: *Global analysis of 1-D Navier–Stokes equations with density dependent viscosity*, v: **Navier Stokes equations and related nonlinear problems**, NSEC-6, VSP Utrecht, TEV Vilnius, Palanga, Lithuania, 1997, 371–390.

[Straškraba, Valli 1988] Straškraba, I. a Valli, A.: *Asymptotic behaviour of the density for one-dimensional Navier–Stokes equations*, Manusc. Math. **62** (1988) 401–416.

[Straškraba, Zlotnik 2002] Straškraba, I. a Zlotnik, A.: *On a decay rate for 1d-viscous compressible barotropic fluid equations*, J. Evol. Equ. **2** (2002) 69–96.

[Struwe 1995] Struwe, M.: *Regular solutions of the stationary Navier-Stokes equations on* $\mathbb{R}^5$, Math. Ann. **302**, No. 4 (1995) 719–741.

[Temam 1977] Temam R.: **Navier–Stokes Equations**, North Holland Pub., Amsterodam–New York–Tokyo, 1977.

[Temam 1983] Temam, R.: **Navier-Stokes equations and nonlinear functional analysis**, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 41. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1983.

[Temam, Ziane 1996] Temam, R. a Ziane, M.: *Navier-Stokes equations in three-dimensional thin domains with various boundary conditions*, Adv. Differential Equations **1**, No. 4 (1996) 499–546.

[Tsai 1998] Tsai, T.-P.: *On Leray's self-similar solutions of the Navier-Stokes equations satisfying local energy estimates*, Arch. Rational Mech. Anal. **143**, No. 1 (1998) 29–51.

[Uchovskij, Judovič 1968] Uchovskii M.R. a Yudovich B.I.: *Axially–symmetric flows of an ideal and viscous fluid*, Prikladnaya matematika i mechanika **32** (1968) 59–69 (angl. překlad v J. Appl. Math. Mech., **32** (1968) 52–61).

[Vaigant 1994] Vaigant, V.A.: *An example of the nonexistence with respect to time of global solutions of Navier–Stokes equations for compressible viscous barotropic fluid*, Dokl. Acad. Nauk **339**, No. 2 (1994) 155–156.

[Valli 1983] Valli, A.: *Periodic and stationary solutions for compressible Navier–Stokes equations via stability method*, Ann. Scuola Normale Sup. Pisa **4**, No. 1 (1983) 607–646.

[Valli 1987] Valli, A.: *On the existence of stationary solutions to compressible Navier–Stokes equations*, Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non.-Lin. **4** (1987) 99–113.

[Valli, Zajączkowski 1986] Valli, A. a Zajączkowski, W.: *Navier–Stokes equations for compressible fluids: global existence and qualitative properties of the solutions in the general case*, Commun. in Math. Phys. **103** (1986) 256–296.

[Wiegner 1987] Wiegner, M.: *Decay results for weak solutions of the Navier-Stokes equations on R^n*, J. London Math. Soc. (2) **35**, No. 2 (1987) 303–313.

[Wolf 2006] Wolf, J.: *A direct proof of the Caffarelli–Kohn–Nirenberg theorem*, preprint.

[Zajączkowski 2004] Zajączkowski, W.: **Global special regular solutions to the Navier–Stokes equations in a cylindrical domain under boundary slip conditions**, Gakuto Series in Math. 21, 2004.