Predikce z konečně mnoha minulých pozorování

1. Přímá metoda.

Předpoklady: $\{X_t\}$ je reálná centrovaná posloupnost s konečnými druhými momenty a autokovarianční funkcí $R(s,t)$.

Problém: Nalézt nejlepší lineární predikci veličin $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots$ na základě $X_1, \dots, X_n$.

Řešení: Předpověď $\widehat{X}_{n+h}(n)$ prvku X_{n+h} na základě $X_1, \dots, X_n$ je projekce X_{n+h} do Hilbertova prostoru $H_n = H\{X_1, \dots, X_n\}$ vytvořeného náhodnými veličinami $X_1, \dots, X_n$, tedy platí

$$\widehat{X}_{n+h}(n) = P_{H_n}(X_{n+h}) = \sum_{j=1}^{n} c_j X_j, \quad X_{n+h} - \widehat{X}_{n+h}(n) \perp X_k,\ k = 1, \dots, n.$$

Konstanty $c_1 \dots, c_n$ určíme z podmínky

$$E\left(X_{n+h} - \sum_{j=1}^{n} c_j X_j\right) X_k = 0, \quad k = 1, \dots, n$$

tj ze soustavy rovnic

$$R(n+h, k) = \sum_{j=1}^{n} c_j R(j,k), \quad k = 1, \dots n.$$

Jestliže posloupnost $\{X_t\}$ je stacionární s autokovarianční funkcí $R(s,t) = R(s-t)$, lze tuto soustavu psát v maticovém tvaru $\mathbf{\Gamma}_n \boldsymbol{c}_n = \boldsymbol{\gamma}_{n,h}$, kde

$$\mathbf{\Gamma}_n = \begin{pmatrix} R(0) & R(1) & \dots & R(n-1) \\ R(1) & R(0) & \dots & R(n-2) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ R(n-1) & R(n-2) & \dots & R(0) \end{pmatrix}$$

a $\boldsymbol{c}_n = (c_1, \dots, c_n)^T$, $\boldsymbol{\gamma}_{n,h} = (R(n+h-1), \dots, R(h))^T$. Je-li $\mathbf{\Gamma}_n$ regulární, je $\boldsymbol{c}_n = \mathbf{\Gamma}_n^{-1} \gamma_{n,h}$. Potom $\widehat{X}_{n+h}(n) = \gamma_{n,h}^T \mathbf{\Gamma}_n^{-1} \boldsymbol{X}_n$, kde $\boldsymbol{X}_n = (X_1, \dots, X_n)^T$.

Reziduální rozptyl je

$$\delta^2 = \|X_{n+h} - \widehat{X}_{n+h}(n)\|^2 = \|X_{n+h}\|^2 - \|\widehat{X}_{n+h}(n)\|^2 = R(0) - \boldsymbol{\gamma}_{n,h}^T \mathbf{\Gamma}_n^{-1} \boldsymbol{\gamma}_{n,h}$$

Věta. *Jestliže $\{X_t\}$ je centrovaná stacionární posloupnost, $R(0) > 0$ a $R(k) \to 0$ pro $k \to \infty$, je matice $\mathbf{\Gamma}_n$ regulární pro všechna n.*

Viz Věta 33

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

Příklad:

Nechť $\{X_t\}$ je autoregresní posloupnost 1. řádu

$$X_t = \phi X_{t-1} + Y_t, \quad t \in \mathbb{Z},\ |\phi| < 1,$$

Y_t nekorelované s nulovou střední hodnotou a konečným rozptylem σ^2 (dále jen $Y_t \sim (0, \sigma^2)$). Hledejme předpověď X_5, známe-li X_1, X_2, X_3.

Řešení: Hledáme $\widehat{X}_5(3) = P_{H_3}(X_5)$. Autokovarianční funkce posloupnosti $\{X_t\}$ je

$$R(t) = \sigma^2 \frac{\phi^{|t|}}{1-\phi^2} \quad t \in \mathbb{Z},$$

tedy

$$\boldsymbol{\Gamma}_3 = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}\begin{pmatrix} 1 & \phi & \phi^2 \\ \phi & 1 & \phi \\ \phi^2 & \phi & 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\Gamma}_3^{-1} = \sigma^{-2}\begin{pmatrix} 1 & -\phi & 0 \\ -\phi & 1+\phi^2 & -\phi \\ 0 & -\phi & 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\gamma}_{3.2} = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}\begin{pmatrix} \phi^4 \\ \phi^3 \\ \phi^2 \end{pmatrix},$$

odkud

$$\boldsymbol{c}_3 = (0, 0, \phi^2)^T, \quad \widehat{X}_5(3) = \phi^2 X_3.$$

V tomto případě však lze postupovat i jinak: zřejmě

$$X_5 = \phi X_4 + Y_5 = \phi^2 X_3 + \phi Y_4 + Y_5$$

a vzhledem k tomu, že $\phi^2 X_3 \in H_3,\ \phi Y_4 + Y_5 \perp H_3$, plyne výsledek $\widehat{X}_5(3) = \phi^2 X_3$ z jednoznačnosti rozkladu X_3.

Reziduální rozptyl je

$$\delta^2 = \|X_5\|^2 - \|\widehat{X}_5(3)\|^2 = R(0) - \phi^4 R(0) = R(0)(1-\phi^4) = \sigma^2(1+\phi^2).$$

Jiný výpočet reziduálního rozptylu:

$$\delta^2 = \|X_5 - \widehat{X}_5(3)\|^2 = \|\phi Y_4 + Y_5\|^2 = \sigma^2(1+\phi^2).$$

2. Rekurzivní metody predikce: inovační algoritmus

Označme pro jednoduchost $\widehat{X}_{n+1}(n) = \widehat{X}_{n+1},\ n = 1, 2, \ldots$ a definujme $\widehat{X}_1 = 0$. Potom $X_j - \widehat{X}_j \perp X_k - \widehat{X}_k, j < k$ a $H_n = H\{X_1 - \widehat{X}_1, \ldots, X_n - \widehat{X}_n\}$. Dále označme

$$v_k = \|X_{k+1} - \widehat{X}_{k+1}\|^2.$$

Predikce o 1 krok

$$\widehat{X}_{n+1} = P_{H_n} X_{n+1} = \begin{cases} 0 & n = 0, \\ \sum_{j=1}^{n} \theta_{n,j}(X_{n+1-j} - \widehat{X}_{n+1-j}), & n = 1, \dots \end{cases}$$

a konstanty $\theta_{n,j}$ se určí rekurentně pomocí vzorců

$$\begin{aligned} v_0 &= R(1,1) \\ \theta_{n,n-k} &= v_k^{-1} \left(R(n+1,k+1) - \sum_{j=0}^{k-1} \theta_{k,k-j}\theta_{n,n-j}v_j \right), \ k = 0, \dots n-1 \\ v_k &= R(k+1,k+1) - \sum_{j=0}^{k-1} \theta_{k,k-j}^2 v_j. \end{aligned}$$

Reziduální rozptyl je $\delta^2 = v_n$.

Predikce o více kroků

Z vlastnosti projektivního zobrazení a ortogonality $X_j - \widehat{X}_j, j = 1, \dots, n$ plyne

$$\begin{aligned} \widehat{X}_{n+h}(n) = P_{H_n}(X_{n+h}) &= P_{H_n}(P_{H_{n+h-1}}(X_{n+h})) = P_{H_n}(\widehat{X}_{n+h-1}) \\ &= P_{H_n}\left(\sum_{j=0}^{n+h-1} \theta_{n+h-1,j}(X_{n+h-j} - \widehat{X}_{n+h-j} \right) \\ &= \sum_{j=h}^{n+h-1} \theta_{n+h-1,j}(X_{n+h-j} - \widehat{X}_{n+h-j}) \end{aligned}$$

Příklad:

Nechť $\{X_t\}$ je posloupnost $MA(1)$ daná předpisem $X_t = Y_t + aY_{t-1}$, kde $Y_t \sim (0, \sigma^2)$. Zřejmě platí

$$\begin{aligned} R(i,j) = R(i-j) &= \sigma^2(1+a^2) \text{ pro } i = j, \\ &= a\sigma^2 \text{ pro } |i-j| = 1, \\ &= 0 \text{ pro } |i-j| > 1 \end{aligned}$$

a tedy $v_0 = (1+a^2)\sigma^2$, $\theta_{n,j} = 0$ pro $j = 2, \dots, n$, $\theta_{n,1} = v_{n-1}^{-1}\theta^2\sigma^2$ a $v_n = (1 + \theta^2 - v_{n-1}^{-1}\theta^2\sigma^2)\sigma^2$. Odtud $\widehat{X}_{n+1} = \theta_{n,1}(X_n - \widehat{X}_n)$, $\widehat{X}_{n+h}(n) = 0$ pro $h > 1$.

Příklad:

Nechť $\{X_t\}$ je posloupnost $MA(q)$ daná předpisem $X_t = Y_t + \theta_1 Y_{t-1} + \ldots, +\theta_q Y_{t-q}$, kde $Y_t \sim (0, \sigma^2)$. Potom pro autokovarianční funkci platí

$$R(h) = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{j=0}^{q-|h|} a_j \theta_{j+|h|} & |h| \le q \\ 0 & |h| > q. \end{cases}$$

Potom

$$\widehat{X}_{n+1} = \sum_{j=1}^{\min(n,q)} \theta_{n,j}(X_{n+1-j} - \widehat{X}_{n+1-j}), \quad n \ge 1.$$

Užití inovačního algoritmu pro modely ARMA(p, q)

Uvažujme kauzální proces

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Y_t + \theta_1 Y_{t-1} + \cdots + \theta_q Y_{t-q},$$

$Y_t \sim (0, \sigma^2)$.

Položme $m = \max(p, q)$ a definujme

$$W_t = \begin{cases} \sigma^{-1} X_t, & 1 \le t \le m \\ \sigma^{-1}[X_t - \phi_1 X_{t-1} - \cdots - \phi_p X_{t-p}] & t > m. \end{cases}$$

Predikce o 1 krok

Zřejmě $H\{X_1, \ldots, X_n\} = H\{W_1, \ldots, W_n\}$. Položme $\widehat{W}_1 = 0$; potom z vlastností projekce plyne

$$\widehat{W}_t = \begin{cases} \sigma^{-1} \widehat{X}_t, & 1 \le t \le m \\ \sigma^{-1}[\widehat{X}_t - \phi_1 X_{t-1} - \cdots - \phi_p X_{t-p}] & t > m, \end{cases} \tag{1}$$

odkud dále plyne, že $W_t - \widehat{W}_t = \sigma^{-1}(X_t - \widehat{X}_t)$ pro $t \ge 1$.

Aplikujeme-li inovační algoritmus na posloupnost $\{W_t\}$, máme

$$\widehat{W}_{n+1} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \theta_{n,j}(W_{n+1-j} - \widehat{W}_{n+1-j}), & 1 \le n \le m-1 \\ \sum_{j=1}^{q} \theta_{n,j}(W_{n+j-1} - \widehat{W}_{n+j-1}) & n \ge m \end{cases} \tag{2}$$

Koeficienty $\theta_{n,j}$ se určí z autokovarianční funkce posloupnosti $\{W_t\}$.

Z (1) a (2) tedy plyne, že predikce o 1 krok pro posloupnost ARMA je

$$\widehat{X}_{n+1} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \theta_{n,j}(X_{n+1-j} - \widehat{X}_{n+1-j} & 1 \le n < m, \\ \sum_{j=1}^{p} \phi_j X_{n+1-j} + \sum_{j=1}^{q} \theta_{n,j}(X_{n+1-j} - \widehat{X}_{n+1-j}), & n \ge m. \end{cases}$$

Predikce o h kroků, $h > 1$

Z (1) dostaneme

$$(3) \qquad \widehat{W}_{n+h}(n) = P_{H_n}(W_{n+h}) = \begin{cases} P_{H_n}(\sigma^{-1}X_{n+h}) & n+h \le m \\ P_{H_n}(\sigma^{-1}[X_{n+h} - \sum_{k=1}^{p} \phi_k X_{n+h-k}]) & n+h > m. \end{cases}$$

Vzhledem k tomu, že

$$\widehat{W}_{n+h}(n) = P_{H_n}(\widehat{W}_{n+h-1}) = \sum_{j=h}^{n+h-1} \theta_{n+h-1,j}(W_{n+h-j} - \widehat{W}_{n+h-j}),$$

dostáváme

$$\widehat{X}_{n+h}(n) = \begin{cases} \sum_{j=h}^{n+h-1} \theta_{n+h-1,j}(X_{n+h-j} - \widehat{X}_{n+h-j}) & n \le m-h \\ \sum_{j=h}^{n+h-1} \theta_{n+h-1,j}(X_{n+h-j} - \widehat{X}_{n+h-j}) + \sum_{j=1}^{p} \phi_j \widehat{X}_{n+h-j}(n) & n > m-h. \end{cases}$$

Příklad:

Nechť $\{X_t\}$ je kauzální autoregresní posloupnost řádu p definovaná jako

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Y_t,$$

$Y_t \sim (0, \sigma^2)$. Potom

$$\widehat{X}_{n+1} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \theta_{n,j}(X_{n+1-j} - \widehat{X}_{n+1-j}) & n < p \\ \phi_1 X_n + \cdots + \phi_p X_{n-p+1} & n \ge p \end{cases}$$

a koeficienty $\theta_{n,j}$ se určí z autokovarianční funkce posloupnosti $\{W_t\}$. Tedy např. pro kauzální posloupnost

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + Y_t$$

je

$$W_t = \begin{cases} \sigma^{-1}X_t, & t = 1, 2 \\ \sigma^{-1}[X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2}] = \sigma^{-1}Y_t, & t > 2 \end{cases}$$

a pro autokovarianční funkci $\{W_t\}$ platí

$$R_W(i,j) = \begin{cases} \sigma^{-2}R_X(i,j), & 1 \le i,j \le 2 \\ 0, & \min(i,j) \le 2 < \max(i,j) \\ \delta(i-j), & \min(i,j) > 2. \end{cases}$$

Je tedy

$$\begin{aligned}
\widehat{X}_1 &= 0,\\
\widehat{X}_2 &= P_{H_1}(X_1) = \theta_{1,1}X_1\\
\theta_{1,1} &= \frac{R_X(1)}{R_X(0)} = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}\\
\widehat{X}_3 &= P_{H_2}(X_3) = \phi_1 X_2 + \phi_2 X_1\\
\widehat{X}_3(1) &= P_{H_1}(X_3) = P_{H_1}(P_{H_2}(X_3)) = P_{H_1}(\widehat{X}_3)\\
&= P_{H_1}(\phi_1 X_2 + \phi_2 X_1) = \phi_1\widehat{X}_2 + \phi_2 X_1) = (\frac{\phi_1^2}{1-\phi_2} + \phi_2)X_1,
\end{aligned}$$

podobně

$$\begin{aligned}
\widehat{X}_4 &= P_{H_3}(X_4) = \phi_1 X_3 + \phi_2 X_2,\\
\widehat{X}_4(2) &= P_{H_2}(X_4) = P_{H_2}(P_{H_3}(X_4))\\
&= P_{H_2}(\phi_1 X_3 + \phi_2 X_2) = \phi_1\widehat{X}_3 + \phi_2 X_2\\
&= \phi_1(\phi_1 X_2 + \phi_2 X_1) + \phi_2 X_2 = (\phi_1^2 + \phi_2)X_2 + \phi_1\phi_2 X_1
\end{aligned}$$

atd.

Příklad

Nechť $\{X_t\}$ je posloupnost ARMA$(1,1)$ definovaná předpisem

$$X_t - \phi X_{t-1} = Y_t + \theta Y_{t-1}, \quad |\phi| < 1.$$

$Y_t \sim (0, \sigma^2)$. Potom

$$W_1 = \sigma^{-1}X_1, \quad W_t = \sigma^{-1}(X_t - \phi X_{t-1}) = \sigma^{-1}(Y_t + \theta Y_{t-1}),\ t \geq 2$$

a autokovarianční funkce posloupnosti $\{W_t\}$ je

$$R_W(1,1) = \sigma^{-2}R_X(0) = \frac{1 + 2\phi\theta + \phi^2}{1-\phi^2}.$$

$$R_W(i,j) = \begin{cases} 1+\theta^2, & i = j \geq 2,\\ \theta & |i-j| = 1,\\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

Je tedy

$$\widehat{X}_{n+1} = \phi X_n + \theta_{n,1}(X_n - \widehat{X}_n), \qquad n \geq 1$$

a koeficienty $\theta_{n,1}$ určíme inovačním algoritmem:

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{1 + 2\theta\phi + \theta^2}{1 - \phi^2} \\ \theta_{n,1} &= \frac{\theta}{v_{n-1}} \\ v_n &= 1 + \theta^2 - \frac{\theta^2}{v_{n-1}}. \end{aligned}$$

Dále je pro $h > 1$

$$\begin{aligned} \widehat{X}_{n+h}(n) &= P_{H_n}(\widehat{X}_{n+h-1}) \\ &= P_{H_n}(\phi X_{n+h-1} + \theta_{n+h-1,1}(X_{n+h-1} - \widehat{X}_{n+h-1})) = \phi \widehat{X}_{n+h-1}(n) \end{aligned}$$

neboť $X_{n+h-1} - \widehat{X}_{n+h-1} \perp H_n$.