Regularita PDR

zápisky z přednášky doc. J. Staré, ZS 2003/2004

Obsah.

Značení.

$L^p(\Omega)$ … Lebesgueův prostor p-integrovatelných funkcí
$\|\cdot\|_p$ … norma v prostoru L^p
$W^{k,p}(\Omega)$ … Sobolevův prostor funkcí s p-integrovatelnou k-tou derivací
$W_0^{1,p}(\Omega)$ … Sobolevův prostor s nulou na hranici
$u_\Omega = \fint_\Omega u$ … integrální průměr u přes Ω
$B(x,R)$ nebo B_R … koule o středu x a poloměru R
$\Omega(x,R)$ … $B(x,R)\cap\Omega$
$BMO(\Omega)$ … funkce s omezenými oscilacemi
$S(x,R)$ nebo S_R … sféra o středu x a poloměru R
$\fint_{B(x,R)} u$ nebo $u_{B(x,R)}$ nebo u_R … integrální průměr u přes $B(x,R)$
$L^{p,\lambda}(\Omega)$ … Morreyův prostor
$\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ … Campanatův prostor
$C^{k,\alpha}(\Omega)$ … funkce s α-hölderovskou k-tou derivací
e_s … bázový vektor
$\nabla_{s,h} u$ … diference $h^{-1}[u(x+he_s)-u(x)]$
λ_n … Lebesgueova n-rozměrná míra
H^α … Hausdorffova α-rozměrná míra
d_H … Hausdorffova dimenze
$\operatorname{supp}\eta$ … nosič funkce
$\operatorname{osc} v|_M$ … oscilace $\sup_M v - \inf_M v$
$\sigma(A)$ … spektrum matice

1. Prostory funkcí. Typy rovnic.

Obsah kapitoly: základní vlastnosti funkcí ze Sobolevových, Morreyových a Campanatových prostorů (bez důkazu); podmínka elipticity; typy rovnic.

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená a otevřená množina s Lipschitzovskou hranicí.

Věta 1.1. (Vnoření pro Sobolevy.)
1. Nechť $n > kp$. Potom $\exists c = c(n, k, p, \Omega)$ tak, že

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq c \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} ,$$

kde $q = np/(n-p)$.
2. Nechť $n < kp$. Potom $\exists c = c(n, k, p, \Omega)$ tak, že

$$\|u\|_{C^{h,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq c \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} ,$$

kde $h = \lceil k - n/p \rceil$, $\alpha = (k - n/p) - h$.

Věta 1.2. (Rellichova.) *Nechť $n > kp$ a $q < np/(n-p)$. Potom vnoření $W^{k,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ je kompaktní.*

Věta 1.3. (Poincaré.) *Nechť Ω je souvislá.*
1. $\exists c = c(n, p, \Omega)$ tak, že

$$\int_\Omega |u - u_\Omega|^p \leq c \|\nabla u\|_p^p$$

pro $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$. Speciálně pro $\Omega = B(x, R)$ je $c = c_0 R^p$.
2. $\exists c = c(n, p, \Omega)$ tak, že

$$\|u\|_p^p \leq c \|\nabla u\|_p^p$$

pro $\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Definice. (Morreyovy a Campanatovy prostory.)
1. Morreyův prostor:

$$L^{p,\lambda}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \sup_{x_0 \in \Omega, \rho > 0} \rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)|^p \, dx < \infty \right\} .$$

2. Campanatův prostor:

$$\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \sup_{x_0 \in \Omega, \, \rho > 0} \rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x) - u_{\Omega(x_0,\rho)}|^p \, dx < \infty \right\} .$$

Poznámka. Místo Lipschitzovských oblastí stačí uvažovat obecnější "oblasti typu A", které splňují

$$A|B(x_0, \rho)| \leq |\Omega(x_0, \rho)| \leq |B(x_0, \rho)|$$

s vhodným $A > 0$. Faktor $\rho^{-\lambda}$ lze pak nahradit výrazem $|\Omega(x_0, \rho)|^{-\lambda/n}$.

Věta 1.4. (Vnoření Morreyových a Campanatových prostorů.)

1. Pro $0 \le \lambda < n$ *je* $L^{p,\lambda}(\Omega) = \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$.

2. Pro $\lambda = n$ *je* $L^{p,n}(\Omega) = L^\infty(\Omega)$, $\mathcal{L}^{p,n}(\Omega) = BMO(\Omega)$.

3. Je-li $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *a* $\nabla u \in L^{p,\lambda}(\Omega)$, *je* $u \in \mathcal{L}^{p,p+\lambda}(\Omega)$.

4. Pro $n < \lambda < n + p$ *je* $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega) = C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, *kde* $\alpha = (\lambda - n)/p$.

5. Pro $\lambda > n$ *je* $L^{p,\lambda}(\Omega) = \{0\}$; *pro* $\lambda > n + p$ *je* $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega) = \mathrm{lin}\,\{1\}$.

Definice. [Rovnice s konstantními koeficienty.]

$$(1) \qquad -\operatorname{div}(A\nabla u) = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(A_{ij}^{\alpha\beta}\frac{\partial u_j}{\partial x_\beta}\right) = 0\,, \qquad i = 1, \dots, N\,,$$

kde $\tilde{u} = (u_1, \dots, u_N) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ jsou neznámé funkce, $A_{ij}^{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$ jsou konstanty.

Definice. [Podmínka elipticity.]

$$\lambda_0|\xi|^2 \le (A\xi, \xi) \le \lambda_1|\xi|^2 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^{nN}$$

kde

$$(A\xi, \xi) = A_{ij}^{\alpha\beta}\xi_i^\alpha\xi_j^\beta$$

Definice. [Lineární rovnice.]

$$(2) \qquad -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left\{A_{ij}^{\alpha\beta}(x)\frac{\partial u_j}{\partial x_\beta}(x)\right\} = -\frac{\partial f_i^\alpha}{\partial x_\alpha}$$

Definice. [Kvazilineární rovnice.]

$$(3) \qquad -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left\{A_{ij}^{\alpha\beta}\big(u(x)\big)\frac{\partial u_j}{\partial x_\beta}(x)\right\} = -\frac{\partial f_i^\alpha}{\partial x_\alpha}$$

Definice. [Nelineární rovnice.]

$$(4) \qquad -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Big\{a_i^\alpha\big(\nabla u\big)\Big\} = 0\,, \qquad i = 1, \dots, N\,.$$

2. Technika diferencí.

Obsah kapitoly: lemma o odhadu derivace pomocí diferencí; věta o regularitě nelineární rovnice; věta o regularitě kvazilineární rovnice za předpokladu spojitosti řešení.

Lemma 2.1. (O diferencích.)

1. Nechť $u \in W^{1,2}(\Omega)$, $\Omega_0 \subset\subset \Omega$. *Potom*

$$\int_{\Omega_0} |\nabla_{s,h}\, u|^2 \le K$$

nezávisle na $0 < |h| < \operatorname{dist}(\Omega_0, \partial\Omega)$.

2. Nechť $u \in L^2(\Omega)$, $\Omega_0 \subset\subset \Omega$. *Nechť*

$$\int_{\Omega_0} |\nabla_{s,h}\, u|^2 \le K$$

nezávisle na $0 < |h| < \operatorname{dist}(\Omega_0, \partial\Omega)$. *Potom* $\frac{\partial u}{\partial x_s} \in L^2(\Omega_0)$ *ve slabém smyslu.*

DŮKAZ. 1. Nejprve odhadujeme (poslední krok je Hölderova nerovnost)

$$
\begin{aligned}
|\nabla_{s,h}\, u|^2 &= |\frac{1}{h}\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x_s}(x + the_s)\, h\, dt|^2 \\
&\leq (\int_0^1 |\nabla u|(x + the_s)\, dt)^2 \\
&\leq \int_0^1 |\nabla u|^2(x + the_s)\, dt\,.
\end{aligned}
$$

Tedy pro dané h (Fubiniho věta)

$$
\int_{\Omega_0} |\nabla_{s,h}\, u|^2 \leq \int_{\Omega_0}\int_0^1 |\nabla u|^2(x + the_s)\, dt\, dx \leq \int_\Omega |\nabla u(y)|^2\, dy
$$

a odtud závěr.

2. Zvol $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_0)$. Je

$$
\int_\Omega \left\{\nabla_{s,h}\, u\right\} \varphi = \int_\Omega u\, \nabla_{s,-h}\, \varphi\,.
$$

Díky slabé kompaktnosti existuje $\chi \in L^2(\Omega_0)$ tak, že $\nabla_{s,h}\, u \rightharpoonup \chi$ v $L^2(\Omega)$ pro $h \to 0$.

Na druhé straně $\nabla_{s,-h}\, \varphi \to -\frac{\partial\varphi}{\partial x_s}$ v (nejéměně) $L^2(\Omega_0)$. Tedy

$$
\int_{\Omega_0} \chi\, \varphi = -\int_{\Omega_0} u\, \frac{\partial \varphi}{\partial x_s}\,,
$$

což je hledaný závěr.

Věta 2.1. (Regularita nelineární rovnice.) *Nechť* $u \in W^{1,2}_{loc}$ *je slabé řešení nelineární rovnice* (4), *kde* $A^{\alpha\beta}_{ij} = \frac{\partial a^\alpha_i}{\partial z^\beta_j}$ *splňují podmínku elipticity. Potom* $u \in W^{2,2}_{loc}$.

DŮKAZ. Testujme rovnici funkcí $\phi = \nabla_{s,-h}\left\{\eta^2\, \nabla_{s,h}\, u\right\}$, kde η je nezáporná seřezávací funkce. Máme

$$
0 = \int_\Omega a^\alpha_i(\nabla u)\, \frac{\partial \phi_i}{\partial x_\alpha} = \int_\Omega \underbrace{\nabla_{s,h}\left\{a^\alpha_i(\nabla u)\right\}}_{I_1}\, \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left\{\eta^2 \nabla_{s,h}\, u_i\right\}}_{I_2}\,.
$$

Zde

$$
\begin{aligned}
I_1(x) &= \frac{1}{h}\Big\{a_i^\alpha\big(\nabla u(x+he_s)\big) - a_i^\alpha\big(\nabla u(x)\big)\Big\} \\
&= \frac{1}{h}\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\Big\{a_i^\alpha\big(\nabla u(x) + t\big[\nabla u(x+he_s) - \nabla u(x)\big]\big)\Big\}\,dt \\
&= \frac{\partial}{\partial x_\beta}\big\{\nabla_{s,h}\, u_j\big\} \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial a_i^\alpha}{\partial z_j^\beta}\big(\nabla u(x) + t\big[\nabla u(x+he_s) - \nabla u(x)\big]\big)\,dt}_{\tilde{A}_{ij}^{\alpha\beta}(x)}
\end{aligned}
$$

a

$$
I_2 = \eta^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\big\{\nabla_{s,h}\, u_i\big\} + 2\eta\frac{\partial \eta}{\partial x_\alpha}\,\nabla_{s,h}\, u_i\,.
$$

Protože $\tilde{A}_{ij}^{\alpha\beta}$ splňují podmínku elipticity, máme

$$
\begin{aligned}
\lambda_0 \int_\Omega \big|\nabla\big\{\nabla_{s,h}\, u\big\}\big|^2\,\eta^2 &\le 2\lambda_1 \int_\Omega \eta|\nabla\{\nabla_{s,h}\, u\}||\nabla\eta||\nabla_{s,h}\, u| \\
&\le \frac{1}{2}[LS] + \frac{2\lambda_1^2}{\lambda_0}\|\nabla\eta\|_{L^\infty}^2 \int_{\operatorname{supp}\eta} |\nabla_{s,h}\, u|^2\,.
\end{aligned}
$$

Tudíž

$$
\int_\Omega \big|\nabla\big\{\nabla_{s,h}\, u\big\}\big|^2\,\eta^2 \le c\int_{\operatorname{supp}\eta} |\nabla_{s,h}\, u|^2\,.
$$

Protože $u \in W^{1,2}_{loc}$, je díky první části lemmatu o diferencích pravá strana omezená nezávisle na h. Odtud díky druhé části lemmatu závěr.

Věta 2.2. (Regularita kvazilineární rovnice.) *Nechť $v \in W^{1,2}_{loc}$ je slabé řešení kvazilineární rovnice* (3)*, kde $A_{ij}^{\alpha\beta} \in C^1 \cap L^\infty$ splňují podmínku elipticity nezávisle na v. Navíc nechť v je spojité. Potom $v \in W^{2,2}_{loc}$.*

Důkaz. Zvolme x_0, $R > 0$. Buď η nezáporná seřerázavací funkce s nosičem v $B(x_0, R)$, rovná 1 na $B(x_0, R/2)$. Testujeme rovnici $\nabla_{s,-h}\,\big\{\eta^2\nabla_{s,h}\, v\big\}$. Máme

$$
0 = \int_\Omega A_{ij}^{\alpha\beta}(v)\frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha}\,\frac{\partial \phi_j}{\partial x_\beta} = \int_\Omega \underbrace{\nabla_{s,h}\,\left\{A_{ij}^{\alpha\beta}(v)\frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha}\right\}}_{I_1}\,\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_\beta}\,\big\{\eta^2\nabla_{s,h}\, v_j\big\}}_{I_2}\,.
$$

Zde

$$\begin{aligned}
I_1(x) &= \frac{1}{h}\Big[A_{ij}^{\alpha\beta}\big(v(x+he_s)\big)\frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha}(x+he_s) - A_{ij}^{\alpha\beta}\big(v(x)\big)\frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha}(x)\Big] \\
&= A_{ij}^{\alpha\beta}\big(v(x+he_s)\big)\,\nabla_{s,h}\left\{\frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha}(x)\right\} \\
&\qquad + \frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha}(x)\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\Big\{A_{ij}^{\alpha\beta}\big(v(x)+t[v(x+he_s)-v(x)]\big)\Big\}\,dt \\
&= A_{ij}^{\alpha\beta}\big(v(x+he_s)\big)\,\nabla_{s,h}\left\{\frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha}(x)\right\} \\
&\qquad + \frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha}(x)\,\nabla_{s,h}\left\{v_k(x)\right\}\int_0^1 \frac{\partial A_{ij}^{\alpha\beta}}{\partial v_k}\big(v(x)+t[v(x+he_s)-v(x)]\big)\,dt \\
&= I_{11}(x) + I_{12}(x)
\end{aligned}$$

a

$$I_2 = \eta^2\,\nabla_{s,h}\left\{\frac{\partial v_j}{\partial x_\beta}(x)\right\} + 2\eta\frac{\partial \eta}{\partial x_\beta}\,\nabla_{s,h}\,v_j = I_{21} + I_{22}\,.$$

Odhadujeme

$$\begin{aligned}
\int_\Omega I_{11}I_{21} &= \int_\Omega A_{ij}^{\alpha\beta}\big(v(x+he_s)\big)\,\nabla_{s,h}\left\{\frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha}(x)\right\}\,\nabla_{s,h}\left\{\frac{\partial v_j}{\partial x_\beta}(x)\right\}\eta^2 \\
&\ge \lambda_0\int_{\operatorname{supp}\eta}\big|\nabla_{s,h}\left\{\nabla v\right\}\big|^2\eta^2\,, \\
\int_\Omega I_{11}I_{22} &= 2\int_\Omega A_{ij}^{\alpha\beta}(\dots)\nabla_{s,h}\left\{\frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha}(x)\right\}\,\nabla_{s,h}\left\{v_i\right\}\frac{\partial \eta}{\partial x_\beta}\eta \\
&\le \frac{\lambda_0}{4}\int_{\operatorname{supp}\eta}\big|\nabla_{s,h}\left\{\nabla v\right\}\big|^2\eta^2 + c\|\nabla\eta\|_{L^\infty}^2\int_{\operatorname{supp}\eta}\big|\nabla_{s,h}\,v\big|^2\,, \\
\int_\Omega I_{12}I_2 &= \int_\Omega \tilde{A}_{ij}^{\alpha\beta}\frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha}\nabla_{s,h}\left\{v_k\right\}\left[\nabla_{s,h}\left\{\frac{\partial v_j}{\partial x_\beta}\right\}\eta^2 + 2\eta\frac{\partial \eta}{\partial x_\beta}\nabla_{s,h}\left\{v_j\right\}\right] \\
&\le c\int_{\operatorname{supp}\eta}\big|\nabla v\big|\,\big|\nabla_{s,h}\left\{v\right\}\big|\,\Big\{\big|\nabla_{s,h}\left\{v\right\}\big|\,\eta^2 + \big|\nabla_{s,h}\left\{v\right\}\big|\,|\eta|\,\eta\Big\} \\
&\le \frac{\lambda_0}{4}\int_{\operatorname{supp}\eta}\big|\nabla_{s,h}\left\{\nabla v\right\}\big|^2\eta^2 + c\|\nabla\eta\|_{L^\infty}^2\int_{\operatorname{supp}\eta}\big|\nabla_{s,h}\left\{v\right\}\big|^2 \\
&\qquad + c\int_{\operatorname{supp}\eta}\big|\nabla v\big|^2\big|\nabla_{s,h}\left\{v\right\}\big|^2\eta^2\,.
\end{aligned}$$

Celkem máme

$$\int_{\operatorname{supp}\eta}\big|\nabla_{s,h}\left\{\nabla v\right\}\big|^2\eta^2 \le c_1 + c_2\int_{\operatorname{supp}\eta}\big|\nabla v\big|^2\big|\nabla_{s,h}\left\{v\right\}\big|^2\eta^2\,. \tag{5}$$

Zbývá odhadnout člen vpravo, formálně odpovídající $|\nabla v|^4$. Zvolme testovací funkci $\psi = (v - v_R)|\nabla_{s,h} v|^2\eta^2$, kde v_R je průměr v přes $B(x_0, R)$. Máme

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega A_{ij}^{\alpha\beta}(v)\frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \psi_j}{\partial x_\beta} \\
&= \int_\Omega A_{ij}^{\alpha\beta}(v)\frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha}\left[\frac{\partial v_j}{\partial x_\beta}\big|\nabla_{s,h}\{v\}\big|^2\eta^2 + 2(v - v_R)\nabla_{s,h}\{v_k\}\nabla_{s,h}\left\{\frac{\partial v_k}{\partial x_\beta}\right\}\eta^2\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \, 2(v - v_R)\big|\nabla_{s,h}\{v\}\big|^2\frac{\partial \eta}{\partial x_\beta}\eta\right].
\end{aligned}
$$

Odsud

$$
\begin{aligned}
(6)\quad & \lambda_0 \int_{\operatorname{supp}\eta} \big|\nabla v\big|^2\big|\nabla_{s,h}\{v\}\big|^2\eta^2 \\
&\le c\,\omega(R)\int_{\operatorname{supp}\eta} \big|\nabla v\big|\big|\nabla_{s,h}\{v\}\big|\big|\nabla_{s,h}\{\nabla v\}\big|\eta^2 + \big|\nabla v\big|\big|\nabla_{s,h}\{v\}\big|^2|\nabla\eta|\eta \\
&\le c\,\omega(R)\int_{\operatorname{supp}\eta} \big|\nabla v\big|^2\big|\nabla_{s,h}\{v\}\big|^2\eta^2 + \big|\nabla_{s,h}\{\nabla v\}\big|^2\eta^2 + \|\nabla\eta\|^2_{L^2(B_R)}
\end{aligned}
$$

Díky spojitosti v lze zmenšením R učinit $\omega(R) = \operatorname{osc} v|_{B_R}$ libovolně malé. Potom z (5), (6) plyne

$$
\int_{\operatorname{supp}\eta} \big|\nabla_{s,h}\{\nabla v\}\big|^2\eta^2 \le c
$$

a odsud závěr.

3. Užití Morreyových a Campanatových prostorů

Obsah kapitoly: Caccioppoliho lemma; Campanatovo lemma; algebraické lemma; regularita gradientu pro lineární rovnici - v Campanatově prostoru a v prostoru Hölderovských funkcí.

Lemma 3.1. (Caccioppoli.) *Je-li $u \in W^{1,2}(B_R)$ slabé řešení rovnice s konstantními koeficienty (1), pak pro každé $q \in \mathbb{R}^N$ platí*

$$
\int\limits_{B_{R/2}} |\nabla u|^2 \le \frac{c}{R^2}\int\limits_{B_R} |u - q|^2
$$

kde $c = c(\lambda_0, \lambda_1)$. Obecněji: vlevo integrál přes B_ρ, vpravo faktor $(R-\rho)^{-2}$, a funguje vlastně pro každou eliptickou rci.

Důkaz. Buď η nezáporná shlazovací funkce rovná jedné na $B_{R/2}$ a nulová vně B_R. Lze žádat $|\nabla\eta| \le c_1/R$. Testovací funkce $\varphi = (u - q)\eta^2$ dává

$$
0 = \int_{B_R} A\nabla u \cdot \nabla\varphi = \int_{B_R} A\nabla u \cdot \nabla u\,\eta^2 + \int_{B_R} A\nabla u \cdot (u - q)\nabla\eta\,2\eta = I_1 + I_2\,.
$$

Nyní

$$
\begin{aligned}
I_1 &\geq \lambda_0 \int_{B_R} |\nabla u|^2 \, \eta^2 \geq \lambda_0 \int_{B_{R/2}} |\nabla u|^2 \\
|I_2| &\leq \frac{2c_1\lambda_1}{R} \int_{B_R} |\nabla u| \eta \, |u - q| \leq \frac{\lambda_0}{2} \int_{B_R} |\nabla u|^2 \, \eta^2 + \frac{2c_1^2\lambda_1^2}{R^2\lambda_0} \int_{B_R} |u - q|^2 \, .
\end{aligned}
$$

Odsud závěr s $c = 4c_1^2\lambda_1^2/\lambda_0^2$. $\square$

Lemma 3.2. (Campanato.) *Je-li $u \in W^{1,2}(B_R)$ slabé řešení rovnice s konstantními koeficienty* (1), *pak pro každé $0 < \rho < R$ platí*

$$
\int\limits_{B_\rho} |u|^2 \leq c \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \int\limits_{B_R} |u|^2 \tag{7}
$$

$$
\int\limits_{B_\rho} |u - u_\rho|^2 \leq c \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2} \int\limits_{B_R} |u - u_R|^2 \tag{8}
$$

kde $c = c(\lambda_0, \lambda_1, n)$.

Důkaz. Ad (7). Bez újmy na obecnosti $\rho \leq R/2$. Zvol k tak, aby $W^{k,2} \subset L^\infty$. Potom

$$
\int_{B_\rho} |u|^2 \leq \kappa_n \rho^n \|u\|^2_{L^\infty(B_\rho)} \leq \kappa_n \rho^n \|u\|^2_{L^\infty(B_{R/2})} \, . \tag{9}
$$

Pomocný výpočet (konstanta vnoření pro B_R): nechť

$$
\|v\|^2_{L^\infty(B_1)} \leq c_1 \|v\|^2_{W^{k,2}(B_1)} \, , \qquad \|v\|^2_{W^{k,2}(B_1)} = \|v\|^2_{L^2(B_1)} + \left\|\nabla^k v\right\|^2_{L^2(B_1)} \, .
$$

Polož $v(y) = u(Ry)$, $x \in B_1$, $u = u(x) \in W^{k,2}(B_R)$. Díky substituci $x = Ry$ ($dy = R^{-n}dx$) a vztahu $\nabla^k_y v(y) = R^k [\nabla^k_x u](Ry)$ máme

$$
\begin{aligned}
\|v\|^2_{L^\infty(B_1)} &= \|u\|^2_{L^\infty(B_R)} \\
\|v\|^2_{L^2(B_1)} &= R^{-n} \|u\|^2_{L^2(B_R)} \\
\left\|\nabla^k v\right\|^2_{L^2(B_1)} &= R^{2k-n} \left\|\nabla^k u\right\|^2_{L^2(B_R)}
\end{aligned}
$$

Tedy (záměnou $R/2$ za R)

$$
\begin{aligned}
\|u\|^2_{L^\infty(B_{R/2})} &\leq c_2 \left\{ R^{-n} \|u\|^2_{L^2(B_{R/2})} + R^{2k-n} \left\|\nabla^k u\right\|^2_{L^2(B_{R/2})} \right\} \, , \\
c_2 &= c_1(2^n + 2^{n-2k}) \, .
\end{aligned} \tag{10}
$$

Druhý člen v (10) odhadneme pomocí série nerovností ($j = 0, \ldots, k-1$)

$$
\int_{B_{(1+j/k)R/2}} |\nabla^{k-j} u|^2 \leq c_3 (2k)^2 R^{-2} \int_{B_{(1+(j+1)/k)R/2}} |\nabla^{k-(j+1)} u|^2
$$

které plynou z obecnějšího Caccioppoliho lemmatu mezi koulemi o poloměrech $(1+j/k)R/2$ a $(1+(j+1)/k)R/2$ díky tomu, že $\nabla^{k-j}u$ splňuje tutéž rovnici (konstantní koeficienty.) Celkem tedy

$$\int_{L^2(B_{R/2})} |\nabla^k u|^2 \le c_4 R^{-2k} \int_{B_R} |u|^2 \,, \qquad c_4 = c_3^k (2k)^{2k} \,.$$

Tato nerovnost spolu s (10), triviálním vnořením $L^2(B_{R/2}) \subset L^2(B_R)$ a (9) dávají (7) s $c = \kappa_n c_2 (1 + c_4)$.

Ad (8). Bez újmy na obecnosti $\rho \le R/2$. Postupným užitím Poincarého nerovnosti, (7) aplikované na ∇u (řeší stejnou rovnici - konstantní koeficienty) a Cacciopoliho nerovnosti s $q = u_R$ máme

$$\begin{aligned}
\int_{B_\rho} |u - u_\rho|^2 &\le c_1\, \rho^2 \int_{B_\rho} |\nabla u|^2 \\
&\le c_2\, \rho^2 \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \int_{B_{R/2}} |\nabla u|^2 \\
&\le c_3 \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2} \int_{B_R} |u - u_R|^2 \,.
\end{aligned}$$

□

Lemma 3.3. (Algebraické.) *Nechť $\varphi = \varphi(\rho)$ je nezáporná, neklesající na $[0, R_0]$; nechť A, B, α, $\beta > 0$, $\alpha > \beta$. Pak existuje $\epsilon_0 > 0$ a $C > 0$ tak, že je-li s vhodným $\epsilon \le \epsilon_0$*

$$\varphi(\rho) \le A \left[\left(\frac{\rho}{R}\right)^\alpha + \epsilon \right] \varphi(R) + BR^\beta \qquad \forall 0 < \rho \le R \le R_0 \,,$$

je $\varphi(\rho) \le C\rho^\beta$ pro $\rho \in [0, R_0]$.

Důkaz. Zvolme $\gamma \in (\beta, \alpha)$ a $\tau \in (0,1)$ tak, že $2A\tau^\alpha = \tau^\gamma$. Polož $\varepsilon_0 = \tau^\alpha$. Potom

$$\begin{aligned}
\varphi(\tau R) &\le A\,(\tau^\alpha + \varepsilon)\, \varphi(R) + BR^\beta \le \tau^\gamma \varphi(R) + BR^\beta \\
\varphi(\tau^2 R) &\le \tau^\gamma \varphi(\tau R) + BR^\beta \tau^\beta \le \tau^{2\gamma}\varphi(R) + BR^\beta \left[\tau^\gamma + \tau^\beta\right] \\
&\vdots \\
\varphi(\tau^k R) &\le \tau^{k\gamma}\varphi(R) + BR^\beta \left[\tau^{(k-1)\beta} + \tau^{\gamma + (k-1)\beta} \dots \tau^{(k-2)\gamma + \beta} + \tau^{(k-1)\gamma}\right]
\end{aligned}$$

Výraz v poslední hranaté závorce je roven $(\tau^{k\beta} - \tau^{k\gamma})/(\tau^\beta - \tau^\gamma)$. Tudíž

$$\varphi(\tau^k R) \le c_1 [\tau^k]^\beta \,, \qquad c_1 = \varphi(R) + BR^\beta/(\tau^\beta - \tau^\gamma) \,.$$

Nechť $0 < \rho \le R$. Buď $k \ge 0$ celé takové, že $\tau^{k+1}R < \rho \le \tau^k R$. Potom

$$\varphi(\rho) \le \varphi(\tau^k R) \le c_1 [\tau^k]^\beta \le \frac{c_1}{(\tau R)^\beta} [\tau^{k+1} R]^\beta \le c_2 \rho^\beta \,, \qquad c_2 = \frac{c_1}{(\tau R)^\beta} \,.$$

□

Věta 3.1. (Regularita lineární rovnice I.) *Nechť $u \in W^{1,2}_{loc}$ je slabé řešení lineární rovnice* (2), *nechť $A^{\alpha\beta}_{ij}(x)$ jsou spojité a splňují podmínku elipticity nezávisle na x. Nechť $f \in L^{2,\lambda}_{loc}$, kde $\lambda \in (0,n)$.*

Potom $\nabla u \in L^{2,\lambda}_{loc}$.

Důkaz. Nechť $\Omega_0 \subset\subset \Omega$. Označ $R_0 = \operatorname{dist}(\Omega_0, \partial\Omega)$ a pro $x_0 \in \Omega_0$ definuj $\|u\|_r = \|u\|_{L^2(B(x_0,r))}$. Cílem je ukázat

$$\|\nabla u\|_\rho \le C\rho^{\lambda/2}, \qquad \forall \rho \le R_0, \tag{11}$$

kde $C = C(R_0, f)$ nezávisí na $x_0 \in \Omega_0$, z čehož zřejmě plyne závěr. Nerovnost (11) se ukáže pomocí algebraického lemmatu. Fixujme ρ, R, kde $\rho \le R \le R_0$.

Lze psát $u = v + w$, kde u, v řeší rovnice

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\big(A(x_0)\nabla v\big) &= 0 \qquad \text{na } B(x_0,R) \\ v &= u \qquad \text{na } \partial B(x_0,R) \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\big(A(x_0)\nabla w\big) &= -\operatorname{div}\Big[\big(A(x_0) - A(x)\big)\nabla u + f\Big] \qquad \text{na } B(x_0,R) \\ w &= 0 \qquad \text{na } \partial B(x_0,R) \end{aligned} \tag{13}$$

Odhadujeme

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_\rho &\le \|\nabla v\|_\rho + \|\nabla w\|_\rho \\ &\le c_1 \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n/2} \|\nabla v\|_R + \|\nabla w\|_R \\ &\le c_1 \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n/2} \|\nabla u\|_R + (c_1+1)\|\nabla w\|_R \,. \end{aligned}$$

Užili jsme trojúhelníkovou nerovnost pro $u = v + w$, Campanatovo lemma pro v na $B(x_0,R)$, triviální odhad $\|\nabla w\|_\rho \le \|\nabla w\|_R$ a trojúhelníkovou nerovnost pro $v = u - w$.

K odhadu posledního členu testujeme (13) funkcí w:

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0,R)} A(x_0)\nabla w \cdot \nabla w &= \int_{B(x_0,R)} \Big[\big(A(x_0) - A(x)\big)\nabla u + f\Big] \cdot \nabla w \\ \lambda_0 \|\nabla w\|_R^2 &\le \Big\{\omega(R)\|\nabla u\|_R + \|f\|_R\Big\}\|\nabla w\|_R \\ \lambda_0 \|\nabla w\|_R &\le \omega(R)\|\nabla u\|_R + c_2 R^{\lambda/2} \,. \end{aligned}$$

Zde $\omega(R) = \sup_{x \in B(x_0,R)} \big\{A(x) - A(x_0)\big\}$. Užili jsme elipticitu $A(x_0)$, hölderovu nerovnost a předpoklad $f \in L^{2,\lambda}$.

Celkem tedy

$$\|\nabla u\|_\rho \le \left[\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n/2} + \lambda_0^{-1}\omega(R)\right] \|\nabla u\|_R + c_2\lambda_0^{-1} R^{\lambda/2} \,.$$

Díky spojitosti lze $\omega(R)$ učinit malé dodatečným zmenšením R_0 a to stejnoměrně vůči $x_0 \in \Omega_0$. Tudíž (11) plyne z algebraického lemmatu pro funkci $\phi(\rho) = \|\nabla u\|_\rho$, $\alpha = n/2$, $\beta = \lambda/2$. $\square$

Věta 3.2. (Regularita lineární rovnice II.) *Nechť $u \in W^{1,2}_{loc}$ je slabé řešení lineární rovnice (2), nechť $A(x) \in C^{0,\mu}_{loc}$ a splňují podmínku elipticity nezávisle na x. Nechť $f \in C^{0,\nu}_{loc}$.*

Potom $\nabla u \in C^{0,\kappa}_{loc}$, kde $\kappa = \min\{\mu, \nu\}$.

Důkaz. Nechť $\Omega_0 \subset\subset \Omega$. Označ $R_0 = \operatorname{dist}(\Omega_0, \partial\Omega)$ a pro $x_0 \in \Omega_0$ definuj $\|u\|_r = \|u\|_{L^2(B(x_0,r))}$, $u_r = u_{B(x_0,r)}$. Cílem je ukázat

$$\|\nabla u - (\nabla u)_\rho\|_\rho \le C\rho^{\frac{n}{2}+\kappa}, \qquad \forall \rho \le R_0, \tag{14}$$

kde $C = C(R_0, f)$ nezávisí na $x_0 \in \Omega_0$. Odsud plyne závěr díky vnoření Campanatových prostorů.

Nerovnost (14) se ukáže pomocí algebraického lemmatu. Fixujme ρ, R, kde $\rho \le R \le R_0$.

Lze psát $u = v + w$, kde u, v řeší rovnice

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\big(A(x_0)\nabla v\big) &= 0 && \text{na } B(x_0, R) \\ v &= u && \text{na } \partial B(x_0, R) \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\big(A(x_0)\nabla w\big) &= -\operatorname{div} F && \text{na } B(x_0, R) \\ w &= 0 && \text{na } \partial B(x_0, R) \end{aligned} \tag{16}$$

kde

$$F = \Big[\big(A(x_0) - A(x)\big)\big(\nabla u - (\nabla u)_R\big) + \big(A(x_0) - A(x)\big)(\nabla u)_R + \big(f - (f)_R\big)\Big].$$

Odhadujeme

$$\begin{aligned} \|\nabla u - (\nabla u)_\rho\|_\rho &\le \|\nabla v - (\nabla v)_\rho\|_\rho + \|\nabla w - (\nabla w)_\rho\|_\rho \\ &\le c_1 \left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{n}{2}+1} \|\nabla v - (\nabla v)_R\|_R + 2\|\nabla w\|_R \\ &\le c_1 \left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{n}{2}+1} \|\nabla u - (\nabla u)_R\|_R + (c_1 + 2)\|\nabla w\|_R . \end{aligned}$$

Užili jsme postupně trojúhelníkovou nerovnost pro $u = v + w$, Campanatovo lemma pro ∇v na $B(x_0, R)$, snadný odhad (Hölderova nerovnost) $\|(\nabla w)_\rho\|_\rho \le \|\nabla w\|_\rho$, triviální odhad $\|\nabla w\|_\rho \le \|\nabla w\|_R$ a konečně trojúhelníkovou nerovnost pro $v = u - w$.

Testováním (16) funkcí w dostaneme díky elipticitě

$$\|\nabla w\|_R \le c_2\|F\|_R \le c_2 R^\mu \|\nabla u - (\nabla u)_R\|_R + c_3 R^\mu \|\nabla u\|_R + c_4 R^{\frac{n}{2}+\nu}$$

- užili jsme $A \in C^{0,\mu}$ a $f \in C^{0,\nu} \subset L^{2,n+2\nu}$, odkud

$$\|f - f_R\|_R \le c_4 R^{\frac{n}{2}+\nu}.$$

Celkem tedy (značíme $\phi(\rho) = \|\nabla u - (\nabla u)_\rho\|_\rho$)

$$\phi(\rho) \le \left[c_1 \left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{n}{2}+1} + c_1 R^\mu\right] \phi(R) + c_2 R^{\frac{n}{2}+\nu} + c_2 R^\mu \|\nabla u\|_R . \tag{17}$$

Zbývá ošetřit poslední člen. Zvol $\varepsilon \in (0, n/2)$. Protože $f \in \mathcal{L}^{2,n-2\varepsilon} \subset L^{2,n-2\varepsilon}$ a $A(x)$ jsou spojité, je podle předchozí věty $\nabla u \in L^{2,n-2\varepsilon}$. Tudíž $\|\nabla u\|_R \leq c_3 R^{n/2-\varepsilon}$ a tedy

$$\phi(\rho) \leq \left[c_1 \left(\frac{\rho}{R} \right)^{\frac{n}{2}+1} + c_1 R^{\mu} \right] \phi(R) + c_2 R^{\frac{n}{2}+\nu} + c_2 R^{\frac{n}{2}+\mu-\varepsilon} . \tag{18}$$

Nyní rozlišme dva případy. Pokud $\mu > \nu (= \kappa)$, stačí zvolit $\varepsilon = \mu - \nu$ a dostaneme

$$\phi(\rho) \leq \left[c_1 \left(\frac{\rho}{R} \right)^{\frac{n}{2}+1} + c_1 R^{\mu} \right] \phi(R) + c_2 R^{\frac{n}{2}+\kappa} .$$

Odsud závěr díky algebraickému lemmatu pro $\alpha = n/2 + 1$, $\beta = n/2 + \kappa$ po případném zmenšení $R_0 (\geq R)$.

Pokud $\nu \geq \mu$, položme $\varepsilon = \mu/2$. Z (18) plyne

$$\phi(\rho) \leq \left[c_1 \left(\frac{\rho}{R} \right)^{\frac{n}{2}+1} + c_1 R^{\mu} \right] \phi(R) + c_2 R^{\frac{n}{2}+\frac{\mu}{2}}$$

a tedy díky algegraickému lemmatu $\phi(\rho) \leq c\rho^{n/2+\mu/2}$. Tudíž $\nabla u \in \mathcal{L}^{2,n+\mu} \subset L^{\infty}$, odkud $\|\nabla u\|_R \leq cR^{n/2}$.

Dosazením do (17) máme

$$\phi(\rho) \leq \left[c_1 \left(\frac{\rho}{R} \right)^{\frac{n}{2}+1} + c_1 R^{\mu} \right] \phi(R) + c_2 R^{\frac{n}{2}+\kappa}$$

neboť $\kappa = \mu \leq \nu$. Závěr opět použitím algebraického lemmatu. □

4. Částečná regularita.

Obsah kapitoly: pokrývací lemma (Vitali); lemma o odhadu Hausdorffovy dimenze; částečná regularita kvazilineární rovnice; Giustiho lemma; 'nepřímý' důkaz částečné regularity.

Lemma 4.1. (Pokrývací.) *Nechť $A \subset R^n$ je omezená a $r(x) : A \to (0, 1)$. Pak existuje posloupnost $\{x_j\} \subset A$ tak, že jsou $B(x_j, r(x_j))$ po dvou disjunktní a*

$$A \subset \bigcup_j B(x_j, 3r(x_j)) .$$

Důkaz. V prvním kroku uvažuji pouze koule $B(x, r(x))$, splňující $r(x) \in [1/2, 1)$. Díky omezenosti A mezi nimi najdu konečný maximální disjuktní podsystém. V n-tém kroku přidávám disjunktně z koulí splňujících $r(x) \in [2^{-n-1}, 2^{-n})$. Vždy jich přibude nejvýše konečně mnoho. Vybrané koule značím $B(x_j, r(x_j))$.

Nyní nechť $y \in A$ je libovolné a $y \neq x_j$ pro $\forall j$. Existuje n, že $y \in [2^{-n-1}, 2^{-n})$. Přitom koule $B(y, r(y))$ nebyla vybrána v n-tém kroku. Tedy existuje $z \in B(y, r(y)) \cap B(x_j, r(x_j))$, kde x_j bylo vybráno nejpozději v n-tém kroku.

Klíčové pozorování: $2r(x_j) \geq 2^{-n} \geq r(y)$. Odsud

$$|y - x_j| \leq |y - z| + |z - x_j| < r(y) + r(x_j) \leq 3r(x_j)$$

a tedy $y \in B(x_j, 3r(x_j))$. $\square$

Lemma 4.2. (Odhad dimenze.) *Nechť $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\alpha \in [0, n)$. Polož*

$$E = \Big\{x \in \Omega : \limsup_{\rho \to 0+} \rho^{-\alpha} \int_{B(x,\rho)} |f| > 0\Big\}.$$

Potom $H^\alpha(E) = 0$, a tudíž $d_H(A) \leq \alpha$.

Důkaz. Vzhledem k σ-subaditivitě H^α je

$$H^\alpha(E) = \sup_K H^\alpha(E \cap K), \qquad K \subset\subset \Omega \text{ kompaktní}$$

$$H^\alpha(E \cap K) = \sup_{s>0} H^\alpha(F_s),$$

$$F_s = \Big\{x \in E \cap K : \limsup_{\rho \to 0+} \rho^{-\alpha} \int_{B(x,\rho)} |f| > s\Big\}$$

Dokážeme $H^\alpha(F_s) = 0$ pro F_s pevné. Zvolme $\varepsilon \in (0, 1)$. Protože

$$\lim_{\rho \to 0+} \rho^{-n} \int_{B(x,\rho)} |f| = \kappa_n |f(x)| < \infty$$

pro skoro všechna $x \in \Omega$, je $\lambda_n(E) = 0$.

Tedy existuje $Q \supset F_s$ otevřená, $\lambda_n(Q) < \varepsilon$.

Nyní pro každé $x \in F_s$ najdu $r(x) \in (0, \varepsilon)$ tak, že $B(x, r(x)) \subset Q$ a

$$\big(r(x)\big)^{-\alpha} \int_{B(x,r(x))} |f| > s\,.$$

Dle pokrývacího lemmatu vyberu disjunktní $B(x_i, r_i)$ (značím $r_i = r(x_i)$) tak, že $F_s \subset \cup_i B(x_i, 3r_i)$. Tedy

$$H^{\alpha,\varepsilon}(F_s) \leq \sum_i (3r_i)^\alpha = 3^\alpha \sum_i r_i^\alpha = \frac{3^\alpha}{s} \int_{\cup_i B(x_i,r_i)} |f| \leq \frac{3^\alpha}{s} \int_Q |f|\,.$$

Pro $\varepsilon \to 0$ jde levá strana k $H^\alpha(F_s)$, pravá k 0 (neboť $\lambda_n(Q) < \varepsilon$) díky absolutní spojitosti integrálu. $\square$

Věta 4.1. (Částečná regularita kvazilineární rovnice.) *Nechť $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ je řešení rovnice*

$$-\operatorname{div}\Big\{A(u)\nabla u\Big\} = f\,. \tag{19}$$

Nechť A je stejnoměrně spojitá a eliptická, nechť $f \in L^p_{loc}$, kde $p > n$. Potom existuje $\Sigma \subset \Omega$ taková, že

(1) *$u \in C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega \setminus \Sigma)$, kde $\alpha = 1 - n/p$;*
(2) *$d_H(\Sigma) < n - 2$.*

DŮKAZ. Zvolme $x_0 \in \Omega$. Pro $R \leq R_0 = \operatorname{dist}(x_0, \Omega)$ označme $\tilde{A} = A(u_R)$. Na $B(x_0, R)$ lze psát $u = v + w$, kde u, v řeší

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\big(\tilde{A}\nabla v\big) &= 0 \qquad \text{na } B(x_0,R) \\ v &= u \qquad \text{na } \partial B(x_0,R) \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\big(\tilde{A}\nabla w\big) &= -\operatorname{div}\Big(\big(\tilde{A} - A(u)\big)\nabla u + f\Big) \qquad \text{na } B(x_0,R) \\ w &= 0 \qquad \text{na } \partial B(x_0,R) \end{aligned} \tag{21}$$

Označme $\|u\|_\rho = \|u\|_{L^2(B(x_0,\rho))}$. Podobně jako ve větě o regularitě lineární rovnice odvodíme pro $\rho \leq R$

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_\rho &\leq c_1 \left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{n}{2}} \|\nabla u\|_R + c_2 \|\nabla w\|_R \\ \|\nabla w\|_R &\leq \|\big(\tilde{A} - A(u)\big)\nabla u\|_R + \|f\|_R \end{aligned}$$

Odhadujeme

$$\|f\|_R^2 = \int_{B_R} |f|^2 \leq |B_R|^{1-\frac{2}{p}} \left(\int_{B_R} |f|^p\right)^{2/p} \leq c_3 R^{n-\frac{2n}{p}}\,.$$

V důkazu budeme dále potřebovat následující hluboký výsledek: z toho, že $u \in W^{1,2}_{loc}$ řeší rovnici (19), lze odvodit, pro vhodné $q > 2$ lokálně platí odhad

$$\left(\fint_{B_R} |\nabla u|^q\right)^{1/q} \leq \left(\fint_{B_{2R}} |\nabla u|^2\right)^{1/2} \tag{22}$$

- tzv. reverzní Hölderova nerovnost.

Označme ω modul spojitosti A, tj.

$$|A(u) - A(v)| \leq \omega(|u-v|^2)\,.$$

BÚNO ω je spojitá, neklesající, konkávní a $\omega(0+) = 0$, $\omega(+\infty-) = \omega_\infty < \infty$.

Odhadujeme

$$\begin{aligned} \|\big(\tilde{A} - A(u)\big)\nabla u\|_R^2 &= \int_{B_R} |\nabla u|^2 |A(u) - A(u_R)|^2 \\ &\leq \left(\int_{B_R} |\nabla u|^q\right)^{2/q} \left(\int_{B_R} \omega^{\frac{2q}{q-2}}(|u-u_R|^2)\right)^{1-2/q} \\ &\leq c\, R^{2n(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})} \int_{B_{2R}} |\nabla u|^2\, \omega_\infty^{\frac{2q}{q-2}-1} \left(\int_{B_R} \omega(|u-u_R|^2)\right)^{1-2/q} \\ &= c \int_{B_{2R}} |\nabla u|^2 \left(\fint_{B_R} \omega(|u-u_R|^2)\right)^{1-2/q} \\ &\leq c \int_{B_{2R}} |\nabla u|^2 \left\{\omega\left(\fint_{B_R} |u-u_R|^2\right)\right\}^{1-2/q} \end{aligned}$$

Použili jsme obyčejnou a reverzní (22) Hölderovu nerovnost, odhad $\omega \le \omega_\infty$, $|B_R| = cR^n$ a nakonec konkávnost ω.

Při značení $\phi(\rho) = \|\nabla u\|_\rho$, $\beta = 1/2 - 1/q$ celkem dostaneme

$$\phi(\rho) \le c_1 \left[\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n/2} + \omega^\beta \left(\fint_{B_R} |u - u_R|^2 \right) \right] \phi(2R) + c_2 R^{\frac{n}{2}(1-\frac{2}{p})} .$$

Chceme použít algebraické lemma. To ale půjde pouze tam, kde je $u - u_R$ malé. Za tímto účelem definujeme

$$\Sigma := \left\{ x_0 \in \Omega : \liminf_{R \to 0+} \fint_{B(x_0,R)} |u - u_R|^2 > 0 \right\}$$

Pokud $x_0 \notin \Sigma$, je s malým R malé též $\fint_{B_R} |u - u_R|^2$ - díky spojitosti dokonce na okolí x_0. Tedy dle Lemmatu 3.3 je

$$\phi(\rho) = \|\nabla u\|_\rho \le c\rho^{\frac{n}{2}(1-\frac{2}{p})} .$$

Tj. na okolí x_0 je $\nabla u \in L^{n-2n/p}$ a podle Věty 1.4, bodu 3 je $u \in \mathcal{L}^{n+2(1-n/p)}$; podle bodu 4 je tedy $u \in C^{0,\alpha}$, kde $\alpha = 1 - n/p$, c.b.d.

Zbývá odhadnout velikost singulární množiny Σ. Z Poincarého (Věta 1.3) a Hölderovy nerovnosti

$$\begin{aligned} \fint_{B_R} |u - u_R|^2 &\le c\, R^{2-n} \int_{B_R} |\nabla u|^2 \\ &\le c\, R^{2-n} \left(\int_{B_R} |\nabla u|^q \right)^{2/q} |B_R|^{1-2/q} \\ &= c\, R^{2-2n/q} \left(\int_{B_R} |\nabla u|^q \right)^{2/q} . \end{aligned}$$

Odtud

$$\Sigma \subset \left\{ x_0 \in \Omega : \liminf_{R \to 0+} R^{q-n} \int_{B(x_0,R)} |\nabla u|^q > 0 \right\} .$$

Protože dle (22) je $\nabla u \in L^q_{loc}$ s nějakým $q > 2$, je podle Lemmatu 4.2 $d_H(\Sigma) \le n - q$. $\square$

Lemma 4.3. (Giusti.) *Nechť $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ je slabé řešení (19), nechť $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$. Potom pro každé $\tau \in (0,1)$ a $M \ge 0$ existují $\varepsilon_0 > 0$ a $R_0 > 0$ s následující vlastností: pokud pro $x \in \tilde{\Omega}$ existuje $R < \min\{R_0, \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)\}$ tak, že*

(a)

$$\mathcal{U}(x,R) := \fint_{B(x,R)} |u - u_{B(x,R)}|^2 \le \varepsilon_0^2 ,$$

(b)

$$u_{B(x,R)} \le M ,$$

je $\mathcal{U}(x,\tau R) \le 2c_*\tau^2\mathcal{U}(x,R)$*, kde konstanta* c_* *závisí pouze na elipticitě* A*.*

Důkaz. Sporem: existují $\tau \in (0,1)$, $M \ge 0$ tak, že lze nalézt posloupnosti $\varepsilon_n \to 0$, $R_n \to 0$ a body $x_n \in \tilde\Omega$ tak, že (a) $\mathcal{U}(x_n,R_n) = \varepsilon_0^2$ a (b) $u_{x_n,R_n} \le M$, avšak $\mathcal{U}(x_n,\tau R_n) > 2c_*\tau^2\mathcal{U}(x_n,R_n)$.

Jak zvolit c_*, aby nastal spor, uvidíme za chvíli.

Zavedeme pomocné funkce

$$v_n(y) = \frac{1}{\varepsilon_n}\left[u(x_n+R_ny) - u_{B(x,R)}\right], \qquad y \in B(0,1)$$

Pozorujeme, že

$$(v_n)_{B(0,1)} = 0$$

$$\mathcal{V}_n(0,1) = \int_{B(0,1)} |v_n|^2 = 1 \tag{23}$$

$$\mathcal{V}_n(0,\tau) > 2c_*\tau^2 \tag{24}$$

kde $\mathcal{V}_n(0,\rho) = \fint_{B(0,\rho)} |v_n - (v_n)_{B(0,\rho)}|^2$. Funkce v_n řeší

$$-\operatorname{div}\left\{A_n(y)\nabla v_n\right\} = 0\,, \qquad y \in B(0,1)$$

kde $A_n(y) = A(R_ny + x_n, \varepsilon_n v_n(y) + u_{B(x_n,R_n)})$. Z Caccioppoliho lemmatu 3.1 plyne pro $\sigma \in (0,1)$

$$\int_{B(0,\sigma)} |\nabla v_n|^2 \le \frac{c_1}{(1-\sigma)^2}\int_{B(0,1)} |v_n|^2$$

kde c_1 závisí jen na elipticitě A_n. Tedy z omezenosti v_n v $L^2(B(0,1))$, viz (23), plyne i omezenost ∇v_n v $L^2_{loc}(B(0,1))$.

Přechodem k podposloupnosti máme $x_n \to x_0 \in \operatorname{cl}(\tilde\Omega)$, $u_{B(x_n,R_n)} \to u_0$, $\nabla v_n \rightharpoonup \nabla v_0$ v L^2_{loc} a $v_n \to v_n$ v L^2_{loc} a také s.v. v $B(0,1)$.

Odsud $A_n(y) \to A_0 = A(x_0,u_n)$ s.v. a $v_0(y)$ řeší v $B(0,1)$

$$-\operatorname{div}\left\{A_0(y)\nabla v_0\right\} = 0$$

Tedy podle Campanatova lemmatu 3.2

$$\mathcal{V}_0(0,\tau) \le c_*\tau^2\mathcal{V}_0(0,1)$$

kde c_* je hledaná konstanta, závisející jen na elipticitě $A_0 = A(x_0,u_0)$. Avšak limitním přechodem plyne z (23), (24)

$$\mathcal{V}_0(0,1) = \int_{B(0,1)} |v_0|^2 \le 1$$

$$\mathcal{V}_0(0,\tau) \ge 2c_*\tau^2$$

což je spor. $\square$

Věta 4.2. („Nepřímý“ důkaz částečné regularity.) *Nechť* $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ *je řešení rovnice*

$$-\operatorname{div}\left\{A(x,u)\nabla u\right\} = 0\,.$$

Nechť A je spojitá a eliptická. Pak existuje $\Sigma \subset \Omega$ taková, že

(1) $u \in C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega \setminus \Sigma)$ *pro libovolné* $\alpha \in (0,1)$;

(2) $d_H(\Sigma) < n-2$.

DŮKAZ. Položme

$$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$$

$$\Sigma_1 := \Big\{ x \in \Omega : \sup_{R<\delta} u_{B(x,R)} = +\infty \Big\}$$

$$\Sigma_2 := \Big\{ x \in \Omega : \liminf_{R\to 0+} \mathcal{U}(x,R) > 0 \Big\}$$

kde $\delta > 0$ je pevné, libovolné a $\mathcal{U}(x,\rho) = \fint_{B(x,\rho)} |u - u_{B(x,\rho)}|^2$. Stejně jako v důkaze Věty 4.1 pomocí reverzního Höldera odvodíme odhad $d_H(\Sigma_2) < n-2$. Pro Σ_1 to v sešitě nemám !!!???

Zbývá regularita u mimo Σ. Dokážeme, že pro každé $x \notin \Sigma$ existuje okolí $U(x)$ tak, že $u \in C^{0,\alpha}(U(x))$ pro libovolné $\alpha \in (0,1)$. Hlavním nástrojem je přitom Giustiho lemma 4.3.

Nechť x, α jsou dána. Protože $x \notin \Sigma_1$, existuje $M > 0$ tak, že $\sup_{R<\delta} u_R < M$. Zvolme $\tau \in (0,1)$ tak, aby $2c_*\tau^2 < \tau^{2\alpha}$, kde c_* pochází z Giustiho lemmatu 4.3 (a jak víme, závisí jen na elipticitě A.)

Giustiho lemma nám zaručuje existenci jistých ε_0 a $R_0 > 0$. Protože $x \notin \Sigma_2$, lze najít $R < R_0$ tak, že $\mathcal{U}(x,R) < \varepsilon_0^2$. BÚNO $R < \delta$, a tedy závěr Giustiho lemmatu dává

$$\mathcal{U}(x,\tau R) \le 2c_*\tau^2 \mathcal{U}(x,R) < \tau^{2\alpha}\mathcal{U}(x,R)$$

Speciálně $\mathcal{U}(x,\tau R) \le \varepsilon_0^2$ a tedy opakovým užitím závěru Giustiho lemmatu $\mathcal{U}(x,\tau^k R) < \tau^{2k\alpha}\mathcal{U}(x,R)$. Konečně ze spojitosti existuje okolí $U(x)$ tak, že

$$\mathcal{U}(y,\tau^k R) < \tau^{2k\alpha}\mathcal{U}(y,R) \qquad \forall y \in U(x) \tag{25}$$

Nechť nyní $\rho \in (0,R)$. Cílem je ukázat

$$\mathcal{U}(y,\rho) \le c\,\rho^{2\alpha} \qquad \forall y \in U(x)$$

kde c nezávisí na y, ρ. Odtud hledaný závěr $u \in \mathcal{L}^{2,2\alpha+n} = C^{0,\alpha}$ na $U(x)$.

Zvolme $k \ge 0$ celé tak, že $\tau^{k+1}R < \rho \le \tau^k R$. Počítejme

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}(y,\rho) &= \frac{1}{|B(y,\rho)|}\int_{B(y,\rho)} |u - u_{B(y,\rho)}|^2 \\
&\le \frac{1}{|B(y,\rho)|}\int_{B(y,\rho)} |u - u_{B(y,\tau^k R)}|^2 \\
&\le \frac{1}{|B(y,\tau^{k+1}R)|}\int_{B(y,\tau^k R)} |u - u_{B(y,\tau^k R)}|^2 \\
&= \tau^{-n}\mathcal{U}(y,\tau^k R) \le \underbrace{\tau^{-n-2\alpha}R^{-2\alpha}\mathcal{U}(y,R)}_{c}\,\rho^{2\alpha}
\end{aligned}$$

Užili jsme toho, že $c = u_B$ je minimum funkce $c \mapsto \int_B |u-c|^2$ a nerovností (25) a $\tau^k \le \rho/(\tau R)$. Důkaz je hotov. $\square$

5. Systémy blízké $-\Delta$.

Obsah kapitoly: dvě věty o Hölderovskosti gradientu pro lineární rovnici 'blízkou' laplaciánu.

Věta 5.1. *Nechť $u \in W^{1,2}_{loc}$ řeší rovnici*

$$-\operatorname{div}\big(A(x)\nabla u\big) = 0$$

kde $A(x)$ je symetrická. Jestliže

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} > \frac{n-2}{n-1}\,, \tag{26}$$

kde λ_i jsou konstanty elipticity a n je dimenze, je u lokálně Hölderovské.

Důkaz. Ukážeme, že funkce

$$\phi(R) = R^{-\lambda}\int_{B(x_0,R)} |\nabla u|^2$$

je s vhodným λ omezená (nezávisle na $x_0 \in \Omega_0 \subset\subset \Omega$ a $R < \operatorname{dist}(\overline{\Omega_0}, \partial\Omega)$.)

Protože $\phi(R)$ je nezáporná a (lokálně) absolutně spojitá, stačí zaručit, že[1]

$$\phi'(R) = -\lambda R^{-\lambda-1}\int_{B_R} |\nabla u|^2 + R^{-\lambda}\int_{S_R} |\nabla u|^2 \geq 0\,.$$

Hlavní bod důkazu spočívá v tom, že $\int_{B_R} |\nabla u|^2$ odhadneme pomocí $\int_{S_R} |\nabla u|^2$. Za tímto účelem definujeme pomocnou funkci v, kde

$$\begin{aligned} -\Delta v &= 0 \qquad x \in B_R \\ v &= u \qquad x \in S_R \end{aligned} \tag{27}$$

Platí

$$\lambda_0 \int_{B_R} |\nabla u|^2 \leq \int\limits_{B_R} \big(A\nabla u, \nabla u\big) \leq \int\limits_{B_R} \big(A\nabla v, \nabla v\big) \leq \lambda_1 \int\limits_{B_R} |\nabla v|^2 \tag{28}$$

První a třetí nerovnost jsou podmínky elipticity. Druhá nerovnost plyne z toho, že u řeší Euler-Lagrangeovu rovnici funkcionálu $\psi \mapsto \int_{B_R}(A\nabla\psi, \nabla\psi)$, $\psi|_{S_R} = u$ a je zde tedy (jediným díky elipticitě) minimizérem.

Dále máme

$$\int\limits_{B_R} |\nabla v|^2 \leq \frac{R}{n-1}\int\limits_{S_R} |\nabla_T v|^2 = \frac{R}{n-1}\int\limits_{S_R} |\nabla_T u|^2 \leq \frac{R}{n-1}\int\limits_{S_R} |\nabla u|^2\,.$$

Zde ∇_T značí derivace pouze ve směru tečném k S_R. První nerovnost plyne z teorie potenciálu (v je harmonická), následující rovnost z toho, že $u = v$ na S_R.

Celkem máme slibovaný odhad

$$\int\limits_{B_R} |\nabla u|^2 \leq \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\cdot\frac{R}{n-1}\int\limits_{S_R} |\nabla u|^2$$

[1] Následující úvahy jsou v pořádku pro skoro všechna R.

a tedy

$$\phi'(R) \geq R^{-\lambda} \int\limits_{S_R} |\nabla u|^2 \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \cdot \frac{\lambda}{n-1}\right).$$

Díky (26) lze zvolit λ tak, že

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} \geq \frac{\lambda}{n-1} > \frac{n-2}{n-1}$$

Z první nerovnosti plyne, že $\phi'(R) \geq 0$, tedy ϕ je (lokálně) omezená, neboli $\nabla u \in L^{2,\lambda}_{loc}$.

Druhá nerovnost zaručuje $\lambda > n-2$, tj. $\lambda = n-2+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Podle Věty 1.4 bodu 3 je $u \in \mathcal{L}^{n+\varepsilon}$; podle bodu 5 je $u \in C^{0,\varepsilon/2}$. □

Věta 5.2. *Nechť $u \in W^{1,2}_{loc}$ řeší rovnici*

$$-\operatorname{div}\big(A(x)\nabla u\big) = 0$$

kde $A(x)$ je symetrická. Jestliže

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} > \frac{\sqrt{n-1}-1}{\sqrt{n-1}+1}, \tag{29}$$

kde λ_i jsou konstanty elipticity a n je dimenze, je u lokálně Hölderovské.

Důkaz. Důkaz je příbuzný důkazu předchozí věty. Rozdíl spočívá v tom, že zlepšíme odhad (28).

Rovnici pro u přepíšeme jako

$$-\Delta u = \operatorname{div}\Big\{\big(I - \Lambda A\big)\nabla u\Big\}. \tag{30}$$

Konstantu Λ zvolíme tak, aby norma $B = I - \Lambda A$ byla minimální. Matice B je symetrická, tedy $\|B\| = \max\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(B)\}$. Protože $1 - \Lambda\lambda_1$ a $1 - \Lambda\lambda_0$ jsou zjevně nejmenší a největší prvek $\sigma(B)$, je optimální volbou $\Lambda = 2/(\lambda_1 + \lambda_0)$ dávající $\|B\| = (\lambda_1 - \lambda_0)/(\lambda_1 + \lambda_0)$.

Funkce v je opět určena rovnicí (27). Rovnici (30) testujeme $w = u - v \in W^{1,2}_0(B_R)$:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B_R} \nabla u \cdot \nabla w &\leq \int\limits_{B_R} \big|(I - \Lambda A)\nabla u \cdot \nabla w\big| \\
&\leq \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_1 + \lambda_0} \int\limits_{B_R} |\nabla u||\nabla w| \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_1 + \lambda_0}\right)^2 \int\limits_{B_R} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\int\limits_{B_R} |\nabla w|^2
\end{aligned}$$

Dále testujeme funkcí w rovnici (27) a dostaneme $\int\limits_{B_R} \nabla v \cdot \nabla w = 0$. Odtud

$$\int\limits_{B_R} \nabla u \cdot \nabla w = \int\limits_{B_R} |\nabla w|^2$$

$$\int\limits_{B_R} |\nabla u|^2 = \int\limits_{B_R} |\nabla v|^2 + |\nabla w|^2$$

Dohromady máme

$$\left\{1 - \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_1 + \lambda_0}\right)^2\right\} \int\limits_{B_R} |\nabla u|^2 \leq \int\limits_{B_R} |\nabla v|^2 .$$

To je hledané zlepšení odhadu (28), neboť λ_0/λ_1 je obecně menší než výraz ve složené závorce vlevo.

Nyní podobně jako v důkazu předchozí věty dostaneme

$$\phi'(R) \geq R^{-\lambda} \int\limits_{S_R} |\nabla u|^2 \left(1 - \left\{1 - \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_1 + \lambda_0}\right)^2\right\}^{-1} \frac{\lambda}{n-1}\right) .$$

K završení důkazu je tedy třeba najít λ tak, že

$$1 - \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_1 + \lambda_0}\right)^2 \geq \frac{\lambda}{n-1} > \frac{n-2}{n-1},$$

což lze právě když platí (29). $\square$

Poznámky.

- Podmínky (26), (29) vyjadřují, že λ_0/λ_1 je blízko 1, tj. matice A je téměř diagonální (laplacián).
- Podmínka (29) je slabší než (26)
- Košelev 78' dokázal analogickou větu s ještě slabší podmínkou

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} > \frac{\sqrt{1 + \frac{(n-2)^2}{n-1}} - 1}{\sqrt{1 + \frac{(n-2)^2}{n-1}} + 1},$$

která je zároveň optimální - její libovolné porušení umožňuje existenci nespojitého řešení.