Uvažujeme systém (SIRd), jehož dynamika je určena rovnicemi

$$S' = \Lambda - \beta SI - \mu S$$
$$I' = \beta SI - \mu I - \alpha I$$

Konstanty Λ, β, μ a α jsou kladné. Kapacita prostředí je $K = \Lambda/\mu$ a základní reprodukční číslo se rovná $\mathcal{R}_0 = \beta K/(\mu + \alpha)$.

Příklad 1 [Lemma III.4] Nechť $\mathcal{R}_0 > 1$. Pak existuje jediný stacionární bod („endemické ekvilibrium“) (S_∞, I_∞) uvnitř množiny $\Delta = \{S \geq 0, I \geq 0, S + I \leq K\}$.

Příklad 2 [Lemma III.5] (a) Je-li $\mathcal{R}_0 < 1$, je „beznákazové ekvilibrium“ $(K, 0)$ asymptoticky stabilní.
(b) Je-li $\mathcal{R}_0 > 1$, je $(K, 0)$ nestabilní, (S_∞, I_∞) je asymptoticky stabilní.

Příklad 3 [„Periodicita“ spalniček.] Předpokládejte, že doba trvání nemoci je dva týdny, délka života sedmdesát let a $\mathcal{R}_0 = 15$. Na základě linearizované rovnice ukažte, že v blízkosti endemického ekvilibria se řešení pohybují po spirále. Určete dobu periody.

Nápověda.
1 — kontrola: $\beta S_\infty = \mu + \alpha$, $\beta I_\infty + \mu = \mu \mathcal{R}_0$.
2 — matice 2x2 má záporné reálné části u obou vlastních čísel, právě když stopa je záporná a determinant kladný.
3 — $\alpha = 26$, $\mu = 1/70$. *Vlastní čísla* $-a \mp ib$ *implikují členy tvaru* $e^{-at} \sin bt$.