Příklady na 3. týden

Obyčejné diferenciální rovnice

Lineární rovnice 1. řádu

1. $y' \cos x = y \sin x + \cos^2 x$
2. $y' - 2\dfrac{y}{x} = x^3$
3. $y' + 2xy = 2x\mathrm{e}^{-x^2}$
4. $y' + y \sin x = \sin x \cos x$
5. $xy' + y = \ln x + 1$
6. $(2\mathrm{e}^y - x)y' = 1$ (Hledejte řešení ve tvaru $x = x(y)$.)
7. Najděte právě to řešení rovnice $y' \sin 2x = 2(z + \cos x)$, které je omezené pro $x \to \frac{\pi}{2}$.

Bernoulliova rovnice

8. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$
9. $y' - 2xy = 2x^3y^2$
10. $y' - \dfrac{1}{x}y = \dfrac{1}{2y}$
11. $xy' + y = y^2 \ln x,\ y(1) = 1$
12. $y' - xy = -y^3\mathrm{e}^{-x^2}$
13. $y' - 9x^2y = (x^5 + x^2)y^{\frac{2}{3}},\ y(0) = 0$

Metrické prostory, topologie $\mathbb{R}^n$

14. Jako vzdálenost mezi dvěma místy na území ČR definujme jako a) vzdálenost na mapě b) nejkratší vzdálenost jízdy autem c) cena jízdenky ČD. Jde v těchto případech o metriku? (Pro případ b), c) ji chápeme pouze na takové podmnožině, kde má funkce vzdálenost smysl.)

15. Ověřte, zda následující množiny posloupností $x = (x_1, x_2, \ldots)$ jsou metrické prostory.
    a) Množina l_1 všech posloupností splňující $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$ s metrikou $\varrho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|$
    b) Množina l_2 všech posloupností splňující $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$ s metrikou $\varrho(x, y) = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2)^{\frac{1}{2}}$
    c) Množina l_∞ všech posloupností splňující $\sup_n |x_n| < \infty$ s metrikou $\varrho(x, y) = \sum_n |x_n - y_n|$

16. V $\mathbb{R}^2$ s obvyklou metrikou najděte uzávěry grafů následujících funkcí
    a)
$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$
    b) $f(x) = D(x)$ (Dirichletova funkce).

17. Najděte vnitřek, uzávěr a hranici následujících množin
    a) Množina všech racionálních čísel z intervalu $(0, 1) \subset \mathbb{R}$
    b) Množina všech $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ splňujících nerovnosti
$$x^2 + y^2 < 1, \quad y \geq 0.$$
    c) Množina všech $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ splňujících nerovnosti
$$|z| < x^2 + y^2 \leq 1.$$
    d) $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$.
    e) Jednotkový kruh se středem v počátku bez úsečky $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$.

18. Které z následujících množin jsou otevřené resp. uzavřené
    a) Množina všech $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ splňujících nerovnost
$$x^2 + y^2 + z^2 > 1.$$

b) Množina všech $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ splňujících nerovnost

$$1 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 2.$$

19. Najděte vnitřek a uzávěr množin (v závislosti na $t \in \mathbb{R}$)

$$M_t = \{(x, y) \in R^2; (|x| + |y|)e^{-(|x|+|y|)} \leq t\}$$

20. Je množina

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2 \leq xyz < 4\}$$

omezená?

21. Dokažte omezenost množiny

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^3 + y^3 - 2xy = 0, x \geq 0, y \geq 0\}$$

22. Dokažte konvexitu množiny

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; |x| + e^y < e, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$$

23. Dokažte souvislost množiny

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^4 + |\arctan x| + y^2 e^{|y|} = 2\}$$

24. Nechť $A \subset X$. Dokažte, že $\partial A = \overline{A} \cap (\overline{X \setminus A})$.

25. Nechť $A, B \subset \mathbb{R}^N$. Ukažte, že $(\partial A \times B) \cup (A \times \partial B) \subset \partial(A \times B)$. Kdy platí rovnost?

26. Nechť X, Y jsou metrické prostory (popř. $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{R}^M$ pokud vám to pomůže pro lepší představu). Nechť $A, B \subset X$. Dokažte
(a) $\overline{A} = \operatorname{int} A \cup \partial A$ (disjunktně)
(b) $X = \operatorname{int} A \cup \operatorname{ext} A \cup \partial A$ (disjunktně)
(c) $\overline{A}$ je nejmenší uzavřená nadmnožina A
(d) $\operatorname{int} A$ je největší otevřená podmnožina A
(e) $\operatorname{ext} A$ je největší otevřená množina disjunktní s A
(f) $x_0 \in \overline{A}$ právě když existují $x_n \in A$, $x_n \to x_0$
(g) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
(h) Platí analogické tvrzení pro průnik?
(i) Je-li $F : X \to Y$ spojité, je $F(\overline{A}) \subset \overline{F(A)}$.