Příklady na 4. týden

Obyčejné diferenciální rovnice

Lineární rovnice s konstantními koeficienty

Nalezněte obecná řešení rovnic

1. $$y^{III} - 3y'' + 3y' - y = 0$$

2. $$y'' - 2y' - 3y = \mathrm{e}^{4x}$$

3. $$y'' - y = 2\mathrm{e}^{x} - x^2$$

4. $$y'' - 3y' + 2y = \sin x$$

5. $$y'' + 4y' - 5y = 2\mathrm{e}^{x} \sin^2 x$$

6. $$y'' - 2y' + y = 2x\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{x} \sin 2x$$

7. $$y^{IV} - 5y'' + 4y = \sin x \cos 2x$$

8. $$y'' - 2y' + y = \frac{\mathrm{e}^{x}}{x}$$

9. $$y'' + 4y = 2\mathrm{tg}\, x$$

10. $$x^2 y^{III} = 2y'$$

11. $$x^2 y'' + xy' + 4y = 10x$$

Lineární rovnice n-tého řádu

Nalezněte obecná řešení rovnic, znáte-li jedno řešení homogenní rovnice

12.
$$(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0, \quad y = \mathrm{e}^{ax}$$

13.
$$xy'' + 2y' - xy = 0, \quad y = \frac{\mathrm{e}^x}{x}$$

14.
$$(x+1)xy'' + (x+2)y' - y = x + \frac{1}{x}, \quad y = x + 2$$

15.
$$(2x+1)y'' + (2x-1)y' - 2y = x^2 + x$$

Jedno řešení je ve tvaru polynomu.

Metrické prostory

Stefan Banach a jedna z jeho vět

16. Metodou postupných aproximací nalezněte řešení rovnice $y' = ax$, $y(0) = \kappa$. Ověřte na základě Banachovy věty, že metoda postupných aproximací na vhodném prostoru konverguje.

17. Metodou postupných aproximací nalezněte přibližné řešení rovnice $2x + \sin x = 1$. Ověřte na základě Banachovy věty, že metoda postupných aproximací na vhodném prostoru konverguje.

18. Metodou postupných aproximací nalezněte přibližné řešení rovnice

$$y(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 s y(s) ds + x.$$

Ověřte na základě Banachovy věty, že metoda postupných aproximací na vhodném prostoru konverguje. Srovnejte toto řešení s přesných řešením, které lze hledat ve tvaru $y(x) = \alpha x^2 + x$.

19. Dokažte: pro každé $0 \leq a \leq 1$ konverguje posloupnost

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}(x_n^2 - a), \quad x_0 = 0$$

k hodnotě $\sqrt{a}$ (iterační metoda výpočtu odmocniny).