Příklady na 5. týden

Obyčejné diferenciální rovnice

Jiné typy ODR

1. $$2yy' = y^2 + y'^2$$

2. $$x^2y'' = y'^2$$

3. $$y^3y'' = 1$$

4. $$y'' = \mathrm{e}^y$$

5. $$y'' + y'^2 = 2\mathrm{e}^{-y}$$

Číselné řady

Číselné řady s nezápornými členy

6. Nalezněte n-tý částečný součet a součet řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\,.$$

7. Spočtěte
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\frac{n}{2}]}}{2^n}\,.$$

8. Spočtěte
$$\sum_{n=1}^{\infty}(a+nd)q^n\,,\quad a,d\in\mathbb{R}\,,\quad |q|<1\,.$$

Sečtěte

9.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}\,.$$

10.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}\,.$$

11. Na základě elementárních úvah rozhodněte zda řady konvergují či divergují
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4n}\,.$$

Použitím kritérií pro konvergenci řad s nezápornými členy rozhodněte o konvergenci či divergenci následujících řad. Pokud řada obsahuje parametry, proveďte vzhledem k nim diskusi.

12.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$$

13.
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

14.
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$$

15.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$$

16.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{(n)^{\alpha}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

17.
$$\sum_{n=1}^{\infty}(n^{n^{\alpha}}-1), \quad \alpha\in\mathbb{R}$$

18.
$$\sum_{n=1}^{\infty}(n^{\frac{1}{n^2+1}}-1)$$

19.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\ldots(4n-3)}$$

20.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$$

21.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{n})^n}$$

22.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(2n^2+n+1)^{\frac{n}{2}}}$$

23.
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}, \quad p\in\mathbb{R}$$

24.
$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}, \quad p,q\in\mathbb{R}$$

25.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\sqrt[3]{n}}$$

26.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!}\frac{1}{n^q}, \quad p,q\in\mathbb{R}$$

27.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\Big)^p, \quad p\in\mathbb{R}$$

Funkce více proměnných

Limita a spojitost funkcí více proměnných

Spočtěte následující limity

28. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$

29. $\lim\limits_{\|(x,y)\|\to\infty} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$

30. $\lim\limits_{\|(x,y)\|\to\infty} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$

31. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,a)} \dfrac{\sin xy}{x}$

32. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^6+y^6}{x^2-y^2}$

33. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$

34. Ukažte, že pro funkci

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

platí

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) = \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y)) = 0,$$

ale

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

neexistuje.

35. Ukažte, že pro funkci

$$f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

limity

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) \text{ a } \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y))$$

neexistují, ale

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\, x.y\neq 0} f(x,y) = 0.$$