

Funkce více proměnných

Parciální derivace

V následujících příkladech zjistěte, kde jsou funkce definované, spojité, kde mají parciální derivace 1. řádu a kde jsou spojité 1. parciální derivace.

1. $f(x, y) = \ln(x + y)$
2. $f(x, y, z) = \cos x \cosh y$
3. $f(x, y) = |x||y|$
4. $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$
5. $f(x, y) = \sqrt[5]{x^5 + y^5}$
6. $f(x, y, x) = x^{\frac{y}{z}}$.
7. Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Pro jaké hodnoty α bude mít funkce

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^\alpha \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$$

parciální derivace 1. řádu v bodě $(0, 0)$?

Spočtěte parciální derivace 2. řádu a zjistěte, zda jsou záměnné

8. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$
9. $f(x, y) = \frac{x}{y^2}$
10. $f(x, y) = x \sin(x + y)$
11. $f(x, y) = \operatorname{tg} \frac{x^2}{y}$
12. $f(x, y, z) = x^{y^z}$
13. $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$

14. $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ (Uvažujte bod $(0, 0)$.)
15. Spočítejte derivaci funkce $x^2 - y^2$ v bodě $(1, 1)$ ve směru jednotkového vektoru, který svírá s kladným směrem osy x úhel $\frac{\pi}{3}$.
16. Najděte jednotkový vektor, v jehož směru má derivace $x^2 - xy + y^2$ v bodě $(1, 1)$ největší, nejmenší a nulovou hodnotu.
17. Spočítejte $\frac{\partial F}{\partial u}$, kde $F = f(g)$, $f(x, y, z)$ je daná funkce a $g_1(u, v) = (u^2 - 1)/2v$, $g_2(u, v) = (u + v)/(u - v)$, $g_3(u, v) = u^2 - v^2$.
18. Nechť $f(s, t)$ je hladká nezáporná funkce na \mathbb{R}^2 . Vyjádřete parciální derivace 1. řádu funkce $g(x, y) = f(x, y)^{f(y, x)}$ pomocí hodnot f a jejich parciálních derivací.

Číselné řady

Číselné řady s obecnými členy

Použitím kritérií pro konvergenci řad rozhodněte o konvergenci (absolutní i neabsolutní, je-li to možné) či divergenci následujících řad. Pokud řada obsahuje parametry, proveďte vzhledem k nim diskusi.

19.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$$

20.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{1}{4^n}$$

21.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$$

22.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots$$

23.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}, \quad x \in \mathbb{R}$$

24.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

25.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2 + (-1)^n}{n}$$

26.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{e^n}$$

27.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + k^2}), \quad k \in \mathbb{R}$$

28.

$$\sum_{n=10}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln \ln \ln n}$$

29.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^{100}}{n} \sin \frac{n\pi}{4}$$

30.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(n + \frac{1}{n})}{\ln \ln n}$$

31.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$$

32.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cos \frac{\pi n^2}{n+1}$$

33.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$$

34.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}, \quad p \in \mathbb{R}$$

35.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}, \quad p \in \mathbb{R}, 0 < x < \pi$$

36.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}, \quad p \in \mathbb{R}$$

37.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{\sin \frac{n\pi}{4} + n^p}, \quad p \in \mathbb{R}$$

38.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \right)^p, \quad p \in \mathbb{R}$$