

Posloupnosti a řady funkcí

Posloupnosti funkcí

Najděte obor bodové konvergence a hodnotu limity posloupnosti funkcí

1.

$$e^x \frac{\sin x \sin 2x \dots \sin nx}{\sqrt{n}}$$

2.

$$\frac{1 + x^{2n+1}}{1 + x^{2n}}$$

3.

$$\sin \pi x n$$

Zjistěte, zda na daných množinách konvergují posloupnosti funkcí stejnoměrně.

4.

$$x^n - x^{n+1} \quad \text{na } [0, 1]$$

5.

$$x^n - x^{2n} \quad \text{na } [0, 1]$$

6.

$$\operatorname{arctg} nx \quad \text{na } (0, \infty)$$

7.

$$\frac{nx}{1 + n^2 x^2} \quad \text{na a) } \{x \in \mathbb{C}; |x| \leq \varepsilon\} \quad \text{b) } \{x \in \mathbb{C}; |x| \geq \varepsilon\}$$

8.

$$\sin \pi x^n \quad \text{na } [0, 1]$$

9.

$$\frac{x}{n} \ln \frac{x}{n} \quad \text{na a) } (0, \varepsilon) \quad \text{b) } (\varepsilon, \infty)$$

10. $\sqrt[n]{1+x^n}$ na $[0, \infty)$

11. $\frac{1+x^{n+1}}{1+x^n}$ na $[0, \infty)$

Zjistěte, zda jsou následující výroky pravdivé.

12.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2} dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} dx$$

13.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4} dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1+n^2x^4} dx$$

14.
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 1^-} x^n$$

Funkce více proměnných

Totální diferenciál

V následujících příkladech zjistěte, kde má funkce totální diferenciál. Určete ho.

15. $f(x, y) = \ln(x + y)$

16. $f(x, y, z) = \cos x \cosh y$

17. $f(x, y) = |x||y|$

18. $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$

19. $f(x, y) = \sqrt[5]{x^5 + y^5}$

20. $f(x, y, x) = x^{\frac{y}{z}}$.

21. Necht' $\alpha \in \mathbb{R}$. Pro jaké hodnoty α bude mít funkce

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^\alpha \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$$

totální diferenciál 1. řádu v bodě $(0, 0)$?

22. Napište diferenciál funkce $f(x, y, z)$, kde $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$,
 $z = 2uv$.

23. Necht' f má totální diferenciál v bodě $(1, 1)$ a $g(t, u) = f(f(u, t), f(t, u))$.
Vypočtete $\frac{\partial g}{\partial x_1}(1, 1)$, je-li $f(1, 1) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(1, 1) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(1, 1) = 2$.

24. Spočtete $d^3 f$, je-li $f(x, y, z) = xyz$.

25. Pomocí diferenciálu spočtete přibližně

(a) $1,02^2 \cdot 2,003^3 \cdot 3,004^3$

(b) $\sin 29^\circ \cdot \operatorname{tg} 46^\circ$