Nalezněte obecné řešení rovnic

$$y^{(8)} + 2y^{(6)} - 2y'' - y = 0 \tag{1}$$
$$y''' - 3y' - 2y = xe^{-x} \tag{2}$$
$$y''' - y'' + y' - y = 2\cos x \tag{3}$$
$$y^{(4)} - 2y^{(3)} - 2y^{(2)} = 4\cosh x \tag{4}$$
$$x^2y'' - xy' - 8y = 11x^3 \ln x \tag{5}$$

Řešení.

1) Char. polynom $(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda^2+1)^3$; kořeny $\lambda = \pm 1$ (jednoduché), $\lambda = \pm i$ (trojnásobné).
$y(x) = c_1\, e^x + c_2\, \cos(x) + c_3\, \sin(x) + c_4\, e^{-x} + c_5\, \cos(x)x + c_6\, \cos(x)x^2 + c_7\, \sin(x)x + c_8\, \sin(x)x^2$

2) Char. polynom $(\lambda-2)(\lambda+1)^2$.
Partikulární řešení hledám ve tvaru: $x^2e^{-x}\,(Ax+B)$,
vyjde $\{A = -1/18, B = -1/18\}$.
Obecné řešení: $y = c_1e^{2x} + e^{-x}\big(c_2 + c_3x - (x^2+x^3)/18\big)$.

3) Char. polynom: $(\lambda-1)(\lambda^2+1)$.
Partikulární řešení hledám ve tvaru: $x\,(A\cos(x) + B\sin(x))$,
vyjde $\{A = -1/2, B = -1/2\}$.
Obecné řešení: $y = c_1e^x + \big(c_2 - x/2\big)\cos x + \big(c_3 - x/2\big)\sin x$.

4) Char. polynom $\lambda^2(\lambda^2 - 2\lambda - 2)$, kořeny $\lambda = 0$ (dvojnásobný), $\lambda = 1 \pm \sqrt{3}$ (jednoduché).
Partikulární řešení hledám ve tvaru $A\cosh x + B\sinh x$ (nebo ekvivalentní tvar $ae^x + be^{-x}$.) Vyjde $\{A = 4/3, B = -8/3\}$, (ekvivalentně $a = -2/3$, $b = 2$.)
Obecné řešení: $y = c_1 + c_2x + c_3e^{(1+\sqrt{3})x} + c_4e^{(1-\sqrt{3})x} + (4\cosh x - 8\sinh x)/3$.

5) Eulerova rovnice – substituce $y(x) = u(\ln x)$ vede na rovnici $u'' - 2u' - 8u = 11te^{3t}$. (Pro neznámou funkci $u = u(t)$.)
Char. polynom: $(\lambda-4)(\lambda+2)$.
Partikulární řešení hledám ve tvaru $e^{3t}(At+B)$; vyjde $A = -11/5$, $B = -44/25$.
Obecné řešení: $u = c_1e^{4t} + c_2e^{-2t} - \frac{11}{25}e^{3t}(5t+4)$.
Substituce $t = \ln x$ dává řešení původní rovnice:
$y = c_1x^4 + c_2/x^2 - \frac{11}{25}x^3(5\ln x + 4)$.