Příklad A1. Je dána funkce

$$f(x,y) = x\sqrt[3]{y}\,.$$

(a) určete definiční obor a zdůvodněte podrobně, že je v něm funkce f spojitá

(b) vypočítejte – přímo z definice – derivaci f ve směru vektoru $(1,2)$ v bodě $(x,y) = (2,1)$

(c) určete totální diferenciál funkce f v počátku
(návod: nejprve spočítejte $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$)

(d) je $\frac{\partial f}{\partial y}$ spojitá v počátku a proč?

Příklad A2. Dokažte, že na základě věty o implicitní funkci určují rovnice

$$\begin{aligned} 2x + y^2z + z^3 &= 0 \\ x^3 + 2xy + 3z &= 0 \end{aligned}$$

v okolí bodu $(x,y,z) = (1,1,-1)$ dvojici hladkých funkcí $y = Y(x)$ a $z = Z(x)$.
Spočítejte $Y'(1)$ a $Z'(1)$.

Příklad B1. Je dána funkce

$$f(x,y) = \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{2x^2+Ay^2} - \sin x\,,$$

kde $A > 0$ je parametr.

(a) ukažte, že f je definována všude mimo počátek

(b) zvolte hodnotu A, pro níž existujte $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$
(návod: spočítejte nejprve limity ve směru souřadných os.)

(c) funkci v počátku dodefinujte výše nalezenou limitou a najděte v počátku její parciální derivace [upravné zadání; – diferenciál beztak skoro nikdo nespočetl...]

Příklad B2. Dokažte, že na základě věty o implicitní funkci určuje rovnice

$$xyz - xy + 2yz - 4xz = 0$$

v okolí bodu $(x,y,z) = (1,2,1)$ hladkou funkci $z = Z(x,y)$.
Spočítejte $\frac{\partial Z}{\partial x}(1,2)$ a $\frac{\partial Z}{\partial y}(1,2)$.