

1. ÚVOD. REÁLNÁ ČÍSLA.

Používané značení.

$P \& Q$	P a zároveň Q
$P \vee Q$	P nebo Q
$P \implies Q$	P implikuje Q
$P \iff Q$	P je ekvivalentní Q
$\neg P$	negace P
$\forall x$	pro každé x
$\exists x$	existuje x
$\exists! x$	existuje jediné x
$x \in A$	x je prvkem množiny A
$A \subset B$	A je podmnožina B
$\{a_1, a_2, \dots, a_N\}$	množina s prvky a_1, a_2, \dots, a_N
$\{x; \varphi(x)\}$	množina všech x s vlastností $\varphi(x)$
\emptyset	prázdná množina
$A \cup B$	sjednocení množin
$A \cap B$	průnik množin
$A \setminus B$	rozdíl množin

Věta A1. (Algebraické vlastnosti \mathbb{R} .) Existuje množina reálných čísel \mathbb{R} , která obsahuje prvky 0 a 1, a jsou na ní definovány operace ' \cdot ' (násobení) a ' $+$ ' (sčítání) tak, že platí (pro $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$):

- (i) $x + y = y + x, x \cdot y = y \cdot x$
- (ii) $x + (y + z) = (x + y) + z, x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
- (iii) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
- (iv) $0 + x = x, 1 \cdot x = x$
- (v) $0 \cdot x = 0$ a naopak: $x \cdot y = 0 \implies x = 0 \vee y = 0$
- (vi) $\forall x, z \exists! y$ tak, že $x + y = z$, toto y značíme $z - x$
- (vii) $\forall z, \forall x \neq 0 \exists! y$ tak, že $x \cdot y = z$, toto y značíme z/x

Poznámka. $-x$ je zkratka za $0 - x$, x^{-1} zkratka za $1 : x$ alias $1/x$. Další standardní značení x^n, x^{-n} etc.

Z bodů (i)–(vii) lze vyvodit všechny další známé poučky, jako např. $-(-x) = x$, $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$ apod.

Věta A2. (Uspořádání \mathbb{R} .) Na množině \mathbb{R} je definována relace ' $<$ ' (menší než) tak, že platí (pro $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$):

- (i) nastane právě jedna z možností: $x = y$ nebo $x < y$ nebo $y < x$
- (ii) $x < y \& y < z \implies x < z$
- (iii) $x < y \implies x + z < y + z$
- (iv) $0 < x \& 0 < y \implies 0 < x \cdot y$

Poznámka. $x \leq y$ je zkratka za $(x < y) \vee (x = y)$. Z Věty A2 opět lze vyvodit další známé poučky, např. $x^2 \geq 0$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$ nebo $x \geq 0$ a $y \leq z$ implikuje $xy \leq xz$ atd.

Definice. (Význačné podmnožiny \mathbb{R} .)

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ (přirozená čísla)

$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0, -1, -2, \dots\}$ (celá čísla)

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ (racionální čísla)

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x > a\}$

$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}$

Definice. Pro $x \in \mathbb{R}$ definuji $|x|$ (absolutní hodnota x) jako

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Lemma 1.1. Nechť $a \geq 0$. Potom $|x| \leq a$ právě když $-a \leq x \leq a$.

Věta 1.1. (Trojúhelníková nerovnost.) Pro $\forall x, y \in \mathbb{R}$ platí:

(i) $|x + y| \leq |x| + |y|$

(ii) $|x - y| \leq |x| + |y|$

(iii) $|x + y| \geq ||x| - |y||$

(iv) $|x - y| \geq ||x| - |y||$

Věta B. (Odmocnina.)

1. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je sudé a $a \geq 0$. Potom existuje jednoznačně určené $b \geq 0$ tak, že $b^n = a$.

2. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je liché a $a \in \mathbb{R}$. Potom existuje jednoznačně určené $b \in \mathbb{R}$ tak, že $b^n = a$.

Uvedené číslo b se nazývá n -tá odmocnina z a a značí se $\sqrt[n]{a}$.

Poznámka. Není (obecně) pravda, že $\sqrt{x^2} = x$ - to platí jen pro $x \geq 0$, pro $x < 0$ máme $\sqrt{x^2} = -x$.

Věta 1.2. Existují iracionální čísla.

Věta A3. (Vlastnosti \mathbb{N} .)

(i) $\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N}$ tak, že $n > x$

(ii) (princip indukce) - Nechť $M \subset \mathbb{N}$ splňuje: (a) $1 \in M$ (b) $n \in M \implies n + 1 \in M$. Potom $M = \mathbb{N}$.

Věta 1.3. Každý otevřený interval obsahuje nekonečně mnoho racionálních a nekonečně mnoho iracionálních čísel.

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}$.

Prvek $x \in M$ se nazve maximum (největší prvek) M , pokud pro $\forall y \in M$ platí $y \leq x$. Značíme $x = \max M$.

Prvek $x \in M$ se nazve minimum (nejmenší prvek) M , pokud pro $\forall y \in M$ platí $y \geq x$. Značíme $x = \min M$.

Číslo K se nazve horní odhad M , pokud pro $\forall x \in M$ platí $x \leq K$.

Číslo L se nazve dolní odhad M , pokud pro $\forall x \in M$ platí $x \geq L$.

Množina se nazve shora omezená, má-li nějaký horní odhad; zdola omezená, má-li nějaký dolní odhad; omezená, je-li omezená shora i zdola.

Příklady. ① $M = [0, 1) = \{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x < 1\}$ – 0 je minimum, maximum neexistuje. Omezená množina.

② $\mathbb{N} - 1$ nejmenší, největší neexistuje. Zdola omezená, shora neomezená množina.

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $S \in \mathbb{R}$ se nazve supremum množiny M , značíme $S = \sup M$, jestliže

(i) $\forall x \in M$ platí $x \leq S$

(ii) $\forall S' < S \exists y \in M$ tak, že $y > S'$

Poznámky.

- Zobecnění pojmu maximum, přesněji: je-li x maximum M , je to také supremum M
- vlastnost (i) = je to horní odhad, vlastnost (ii) = nic menšího není horní odhad. Tj. supremum je „nejmenší horní odhad“ množiny
- existuje nejvýše jedno supremum množiny

Definice. Číslo s se nazve infimum množiny M , značíme $s = \inf M$, jestliže

(i) $\forall x \in M$ platí $x \geq s$

(ii) $\forall s' > s \exists y \in M$ tak, že $y < s'$

Věta A4. Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná a shora omezená. Potom existuje $S \in \mathbb{R}$ tak, že $S = \sup M$.

Věta A4'. Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná a zdola omezená. Potom existuje $s \in \mathbb{R}$ tak, že $s = \inf M$.

Definice. (Komplexní čísla.) Symbolem \mathbb{C} značíme množinu všech čísel tvaru $x+iy$, kde $x, y \in \mathbb{R}$ a i je imaginární jednotka (platí $i^2 = -1$.) Je-li $z = x+iy$, píšeme $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$ (reálná, resp. imaginární část z).

Definice. (Rozšířená reálná čísla.) Klademe $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{(+)\infty, -\infty\}$. Uspořádání a početní operace s prvky $\pm\infty$ definujeme takto:

- $\forall x \in \mathbb{R}$ je $-\infty < x < \infty$, dále $-\infty < \infty$
- $\forall x \in \mathbb{R}$ je $x + \infty = \infty$, $x - \infty = -\infty$, dále $\infty + \infty = \infty$, $-\infty - \infty = -\infty$
- $\forall x > 0$ je $x \cdot \infty = \infty$, $x \cdot (-\infty) = -\infty$, dále $\infty \cdot \infty = \infty$
- $\forall x < 0$ je $x \cdot \infty = -\infty$, $x \cdot (-\infty) = \infty$, dále $-\infty \cdot (-\infty) = \infty$
- $\forall x \in \mathbb{R}$ je $\frac{x}{\infty} = 0$, $\frac{x}{-\infty} = 0$

Nedefinováno zůstává: $\infty - \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $\frac{x}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.