1. Úvod. Reálná čísla

Motto: Matematika je nudná a tvrdá z téhož důvodu jako houba je na dotek měkká a studená: nemá kostru svenci?

P, Q výroky

$P \& Q$. P a zároveň Q

$P \vee Q$ ... P nebo Q

$P \Rightarrow Q$ .. P implikuje Q, z P plyne Q

$\neg P$ ... ne P $\quad$ $P \Leftrightarrow Q$ .. P platí právě když Q, neboli $P \Rightarrow Q$ & $Q \Rightarrow P$.

$\forall x$ ... pro každé x

$\exists x$. existuje x ; $\exists! x$ .. existuje jediný (jednoznačně určené) x

---

množina : soubor prvků

$x \in A$ .. x je prvkem množiny A

$A \subseteq B$ .. množina A je částí množiny B; tj. $x \in A \Rightarrow x \in B$.

ϕ ... prázdná množina; též $\{\}$. ; konečná množina $\{a_1, \dots a_n\}$

množinové operace :

$$A \cup B = \{x;\ x \in A \vee x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x;\ x \in A \ \& \ x \in B\}$$

$$A \setminus B = \{x;\ x \in A \ \& \ x \notin B\}$$

Věta A1. Existuje množina reálných čísel $\mathbb{R}$, která obsahuje prvky 0 a 1, a jsou na ní definovány operace $\cdot$ (násobení) a $+$ (sčítání) tak, že platí:

(i) $x+y = y+x$, $x \cdot y = y \cdot x$ $\quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ (komutativní zákon)

(ii) $x+(y+z) = (x+y)+z$, $x\cdot(y\cdot z) = (x \cdot y)\cdot z$ $\forall x,y,z$ (asociativní zákon)

(iii) $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$ (distributivní zákon)

(iv) $0 + x = x$; $1 \cdot x = x$

(v) $0 \cdot x = 0$ a naopak $x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$

(vi) $\forall x, z$ $\exists! y$ tak, že $x + y = z$; toto y značíme $z - x$

(vii) $\forall x, z$; $x \neq 0$ $\exists! y$ tak, že $x \cdot y = z$; toto y značíme $z : x$, z/x

<u>Poznámky</u> • dále značení: $\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ krát}} = x^n$

x^{-1} místo $1 : x$ $(x \neq 0)$

x^{-n} místo $1 : x^n$

$-x$ místo $0 - x$; tj. ono jediné číslo y, pro které $x + y = 0$. (bod (vi)).

• odsud lze vyvodit všechny další pravidla; např.

$-(-x) = x$. $-x$ dle definice $x + (-x) = 0$

tedy $(-x) + x = 0$

tj.: x je takové číslo y, že

$(-x) + y = 0$

tedy $x = -(-x)$.

dále: $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y$

počty: $x \cdot y + (-x) \cdot y =$ / (ii)

$= y \cdot x + y \cdot (-x)$ / (iii)

$= y \cdot (x + (-x))$ $x + (-x) = 0$ (definice $-x$)

$= y \cdot 0$ (i)

$= 0 \cdot y$

$= 0$

tj.: $(-x) \cdot y$ je takové číslo Y, že platí $x \cdot y + Y = 0$

tedy $(-x) \cdot y = -xy$ dle definice.

Věta A2. Na množině $\mathbb{R}$ je definována relace $<$, (menší než) tak, že platí

(i) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ nastane právě jedna z těchto možností
$$x < y \text{ nebo } x = y \text{ nebo } y < x$$

(ii) $x < y \ \& \ y < z \Rightarrow x < z$

(iii) $x < y \Rightarrow x + z < y + z$

(iv) $0 < x, 0 < y \Rightarrow 0 < x \cdot y$

Tvrzení: $x^2 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

Pozn.: • další značení: $x > y$ ... značí $y < x$

$x \leq y$ ... $(x < y) \vee (x = y)$

$x \geq y$ ... $(x > y) \vee (x = y)$

• již lze odtud vyvodit všechna další pravidla pro $<$, např. $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$ atd... Př: $x < y, a < b \Rightarrow x + a < y + b$

$x < y$; $a < 0$
$\Rightarrow ax > ay$

$x < y \quad | +(-x)$

$0 < y - x$

$a < 0 \quad | +(-a)$

$0 < 0 + (-a) = -a$

$0 < -a \cdot (y - x)$

$= -a \cdot y + (-a)(-x)$

$= -ay + ax$

$ay < ax$

Další významné podmnožiny $\mathbb{R}$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ přirozená čísla

$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ celá čísla

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ racionální čísla

intervaly:

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$ otevřený

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$ uzavřený

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$ polouzavřené

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; a < x\}$ neomezené

$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x\}$

podobně $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$.

Definice [illegible]

hodnota x) jako
$$|x| = \begin{cases} x\text{ ; pro } x \geq 0 \\ -x \text{ pro } x < 0. \end{cases}$$

Pozn.: $|x| \geq 0$; $|-x| = |x|$.

Lemma 1.1. Nechť $a \geq 0$. Potom $|x| \leq a$ právě když $-a \leq x \leq a$.

Dk.: 1. nechť $x \geq 0$. Pak $|x| = x$ a lemma tvrdí:

$$x \leq a \iff -a \leq x \leq a \;:\; (-a \leq x) \,\&\, (x \leq a)$$

2. nechť $x < 0$. Pak $|x| = -x$ a lemma tvrdí

$$-x \leq a \iff -a \leq x \leq a$$

$$-x \leq a \iff (-a \leq x) \,\&\, (x \leq a)$$

$$-x \leq a \iff (-x \leq a)$$

↑ platí neb $a \geq 0$, $x < 0$

Věta 1.1. [trojúhelníková nerovnost] Pro $\forall x, y \in \mathbb{R}$ platí

(i) $|x+y| \leq |x| + |y|$

(ii) $|x-y| \leq |x| + |y|$

(iii) $|x+y| \geq \big||x| - |y|\big|$

(iv) $|x-y| \geq \big||x| - |y|\big|$

Dk. (i) dle Lem. 1.1.

$$-|x| \leq x \leq |x|$$
$$-|y| \leq y \leq |y|$$
$$\overline{-\big(|x| + |y|\big) \leq x + y \leq \big(|x| + |y|\big)}$$

$$\text{L. 1.1} \Rightarrow \quad |x+y| \leq |x| + |y|$$

(iii) trikový důkaz:

$$|x| = |(x+y) - y| \leq |x+y| + |-y| = |x+y| + |y|$$

Tj.: $|x| - |y| \leq |x+y|$

Záměna $x \leftrightarrow y$: $|y| - |x| \leq |x+y|$

L. 1.1: $\big||x| - |y|\big| \leq |x+y|$.

Věta ε [Odmocnina].

1. Nechť $a \geq 0$ a $n \in \mathbb{N}$ je sudé. Pak existuje jediné číslo $b \geq 0$ tak, že $b^n = a$.
2. Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ je liché. Pak existuje jediné číslo $b \in \mathbb{R}$ tak, že $b^n = a$.

Toto b se nazývá n-tá odmocnina z a, značíme $\sqrt[n]{a}$.

Pozn. $\sqrt{1} = \sqrt[3]{1} = 1$; $\sqrt{0} = 0$

$\sqrt[3]{-1} = -1$. symbol $\sqrt{-1}$ není definován.

Pozn.
~~Výpočet~~: Není pravda, že $\sqrt{x^2} = x$;

= obecně $\sqrt{x^2} = |x|$;

= $\sqrt[n]{x^n} = x$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$; n liché.

Věta 1.2. Existují iracionální čísla.

Dk. V.B $\Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}$ tak, že $x^2 = 3$; ukážeme, že $x \notin \mathbb{Q}$.

?? Sporem: nechť $x = \frac{p}{q}$; $p, q \in \mathbb{N}$; BÚNO: p, q nesoudělná (jinak zkrátíme)

$$x^2 = \frac{p^2}{q^2} = 3$$

$$p^2 = 3q^2 \; ; \quad 3 \mid p^2$$

nutně, že $3 \mid p$.

nechť $p = 3k + l$; $l = 0, 1, 2$

$$p^2 = (3k+l)^2 = 9k^2 + 6kl + l^2$$

$$l^2 = p^2 - 9k^2 + 6kl$$

tedy $3 \mid l^2$:

l	0	1	2
l^2	0	1	4

nutně $l = 0$.

$p = 3k$

$p^2 = 9k^2 = 3q^2$

$3k^2 = q^2$; tedy $3 \mid q^2 \Rightarrow 3 \mid q$

[illegible]

(i) pro $\forall x \in \mathbb{R}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $x < n$ (Archimédes)

(ii) (princip indukce): nechť $M \subset \mathbb{N}$ splňuje

$$(a)\ 1 \in M \quad (b)\ n \in M \Rightarrow n+1 \in M$$

Potom $M = \mathbb{N}$.

Důsledky: • (i) $\Rightarrow$ tzv. Eudoxovа vlastnost:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} \text{ tak, že } n\varepsilon > 1$$

(položí $x = \frac{1}{\varepsilon}$ ve V. A3 (i))

Věta 1.3. Každý otevřený interval obsahuje nekonečně racionálních a nekonečně iracionálních čísel.

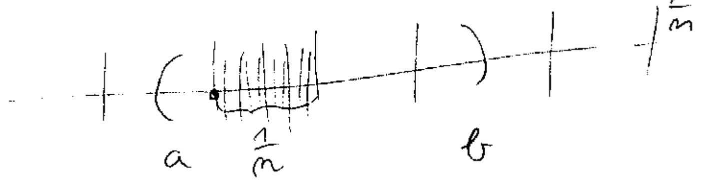
Dk.: $I = (a, b)$ je dán; BÚNO $0 < a < b$.

1. krok: existují $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ tak, že $\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \in I$.

Věta A3(i) $\Rightarrow$ $\exists n \in \mathbb{N}$ tak, že $n > \frac{2}{b-a}$, tj. $\frac{1}{n} < \frac{b-a}{2}$.

nechť k je nejmenší takové $\frac{k}{n} > a$; tedy $\frac{k-1}{n} \leq a$

ukážeme, že $\frac{k+1}{n} < b$. Sporem: $\frac{k+1}{n} \geq b$



leč: $\frac{k-1}{n} \leq a$;

$$-a \leq \frac{1-k}{n}$$

$$b - a \leq \frac{2}{n}$$

$$n \leq \frac{2}{b-a} \quad \text{spor.}$$

2. krok: $a < \frac{k}{n} < \frac{k}{n} + \frac{1}{n} < b$

tedy číslo $\frac{k}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{p}{p+1}$; $p \in \mathbb{N}$

jsou racionální; leč

$$a < \frac{k}{n} + \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\frac{p}{p+1}}_{<1} < \frac{k}{n} + \frac{1}{n} < b.$$

$\frac{k}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{p}{p+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$; jsou iracionální

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}$.

Číslo $x \in M$ se nazve maximum (největší prvek) M,
pro $\forall y \in M$ platí $y \leq x$. Značíme $x = \max M$.

Číslo $K \in \mathbb{R}$ se nazve horní odhad M,
pokud $\forall y \in M$ platí $y \leq K$.

Množina se nazve shora omezená, pokud má nějaký horní odhad.

Analogicky definujeme: minimum (nejmenší prvek), dolní odhad, zdola omezená množina. Množina je omezená, právě když je shora i zdola omezená.

Příklady: • $M = [0,1)$ .. 0 je minimum, maximum nemá:

$x \in M$ libovolné: $y = \frac{1+x}{2} \in M$; a $y > x$.

M je omezená (zdola 0, shora 1)

• $\mathbb{N}$ -- zdola omezená, shora neomezená,
1 min, maximum nemá.

Definice. Číslo $S \in \mathbb{R}$ se nazve supremum množiny M, značíme $S = \sup M$,
jestliže (i) $\forall x \in M$ platí $x \leq S$

(ii) $\forall S' < S \ \exists y \in M$ tak, že $y > S'$.

• $x = \max M \Rightarrow x = \sup M$.

Poznámka • pozorování: $S = \sup M \Leftrightarrow S$ je nejmenší horní odhad M.

(i) říká: S je horní odhad M

(ii) pokud $S' < S$, pak S' není horní odhad M.

• množina má nejvýše jedno supremum.

nechť $S, \tilde{S}$ jsou dvě různá suprema: BÚNO: $\tilde{S} < S$

vl. (ii) pro S: $\exists y \in M$; $y > \tilde{S}$.

pak ale $\tilde{S}$ nemá vl. (i)

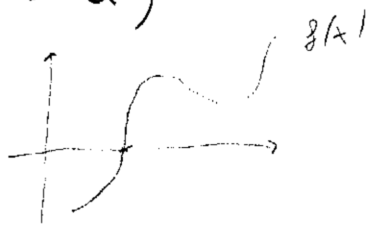
Analogicky: Číslo $s \in \mathbb{R}$ se nazve infimum množiny M, značíme $s = \inf M$,
jestliže (i) $\forall x \in M$ platí $x \geq s$

(ii) $\forall s' > s \ \exists y \in M$ tak, že $y < s'$.

a opět platí: $s = \min M \Rightarrow s = \inf M$; $\inf M$ je největší dolní odhad M, ..

Věta A4: Každá neprázdná, shora omezená $M \subset \mathbb{R}$ má v $\mathbb{R}$ supremum.

Pozn.:
- toto je „rozhodující" vlastnost $\mathbb{R}$ (rozlišuje od $\mathbb{Q}$.)
- lze ukázat, že Věta A4 implikuje Věta A3.
- všechny důležité věty se opírají o V. A4, resp. věta B bude důsledkem.



Věta A4': Každá neprázdná, zdola omezená $M \subset \mathbb{R}$ má v $\mathbb{R}$ infimum.

Důkaz: Věta A4 $\Rightarrow$ Věta A3.(i):

sporem: nechť neplatí $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N})(n > x)$

tzn. $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})(n \le x)$

neboli x je horní odhad $\mathbb{N}$.

tzn. $\mathbb{N}$ je neprázdná, shora omezená.

$\therefore$ V. A4 $\Rightarrow \exists S \in \mathbb{R};\ S = \sup \mathbb{N}$.

$x-1 < x$; vl. (ii) $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N};\ n > x-1$

$\mathbb{N} \ni n+1 > S = \sup \mathbb{N}$.

Věta A4 $\Rightarrow \exists\, y > 0$ tak, že $y^2 = 2$.

Komplexní čísla:

$\mathbb{C} := \{x + iy;\ x, y \in \mathbb{R}$ a „i" je imaginární jednotka$\}$

$$\boxed{i^2 = -1}.$$

$z \in \mathbb{C}$ … ztotožníme s dvojicí $x, y \in \mathbb{R}$

$x = \mathrm{Re}\, z$, $y = \mathrm{Im}\, z$ (reálná, imaginární část)

algebraické vlastnosti $\mathbb{C}$ jako v $\mathbb{R}$;

ale $\mathbb{C}$ nelze uspořádat: $i \neq 0$: $i > 0 \ / \cdot i$

$-1 > 0$

Definice. (rozšířená reálná čísla)

$R^* := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. značení: $+\infty = \infty$.

plus/minus nekonečno;

uspořádání: $\forall x \in \mathbb{R}$:
$$x < +\infty$$
$$-\infty < x$$
$$-\infty < +\infty$$

algebraické operace $\forall x \in \mathbb{R}$:
$$x + (+\infty) = +\infty$$
$$x + (-\infty) = -\infty$$
$$\frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$$

$\forall x > 0$: $x \cdot (+\infty) = +\infty$; spec. $(+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$.
$$x \cdot (-\infty) = -\infty$$

$\forall x < 0$: $x \cdot (+\infty) = -\infty$
$$x \cdot (-\infty) = +\infty$$

$$+\infty + (+\infty) = +\infty \; ;$$

pozor: $0\cdot(+\infty)$, $0\cdot(-\infty)$, $\frac{x}{0}$; $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$;
$+\infty - (+\infty)$ … zůstávají nedefinovány
$-\infty + (+\infty)$ říkáme, že „nemají smysl".

Věta 1.4. Libovolná $M \subset \mathbb{R}$ má v $\mathbb{R}^*$ supremum.

Dk.: 1. M neprázdná, shora omezená: $\exists \sup M \in \mathbb{R}$ (Věta A4.)

2. M (neprázdná) shora neomezená: ukážeme, že $\sup M = +\infty$.

(i) $\forall x \in M$ platí $x \leq +\infty$ jasné

(ii) $S' < +\infty \overset{?}{\Rightarrow} \exists y \in M;\ y > S'$

kdyby ne, tak $y \leq S'$ $\forall y \in M$

$\Rightarrow S'$ je horní odhad M; spor.

později ??

3. $M = \emptyset$: ukážeme, že $\sup M = -\infty$.

(i) $\forall x \in M$ platí $x \leq -\infty$ a (ii) $\forall S' < -\infty$ platí $\exists y \in M;\ y > S'$.