Primitivní funkce

Úmluva. V celé kapitole I, J jsou otevřené intervaly.

Definice: Nechť $F(x), f(x): I \to \mathbb{R}$. Řekneme, že $F(x)$ je primitivní funkce k $f(x)$ v intervalu I, jestliže $F'(x) = f(x)$ pro $\forall x \in I$.

Značíme $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x)$.

Terminologie: $F(x)$ ... neurčitý integrál $f(x)$,
$f(x)$ ... integrand; x ... integrační proměnná.

Příklady:

1. $\displaystyle\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ v $\mathbb{R}$; $n \geq 0$ celé.

2. $\displaystyle\int \frac{1}{x^n}\,dx = \frac{-1}{(n-1)\,x^{n-1}}$ v $(-\infty, 0)$, a v $(0, \infty)$; $n \geq 2$ celé.

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$ v $(-\infty, 0)$ a v $(0, \infty)$

   obecněji: $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|$ v I, pokud $f(x) \neq 0$ a $f'(x)$ existuje vlastní v I.

   $$\{\ln|f(x)|\}' = \ln'(|f(x)|) \cdot |f(x)|' = \frac{1}{|f(x)|} \cdot f'(x) \operatorname{sgn}\{f(x)\}$$

   $$= \frac{f'(x)}{f(x)}$$; neboť $\dfrac{\operatorname{sgn} y}{|y|} = y$, $y \neq 0$.

4. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x$, $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x$, $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x$ v $\mathbb{R}$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$; v $(-1, 1)$

   $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$ v $\mathbb{R}$.

<u>Věta 5.1</u> (linearita integrálu).

(1) $\int a f(x) + b g(x)\, dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$

v každém I, kde mají smysl integrály vpravo.

(2) Jestliže $\int f(y)dy = F(y)$ v J; pak $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)$

v každém I takovém, že $\{ax+b : x\in I\} \subset J$.

<u>dk:</u> (1) nechť $\int f(x)dx = F(x)$, $\int g(x)dx = G(x)$ v I

$$\left[aF(x) + bG(x)\right]' = aF'(x) + bG'(x) = af(x) + bg(x)\ ;$$

tj. (PS) je prim. fce k integrandu na levé straně;

(2) dle předpokladu $F'(y) = f(y)$ pro $\forall y\in J$.

$$\left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right]' = \frac{1}{a}F'(ax+b)\cdot a = f(ax+b) \text{ pro } \forall x\in I$$

<u>Věta 5.2.</u> (Integrování per-partes) Nechť $u(x), v(x)$ mají vlastní derivace v I. Potom $\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx$ v I.

<u>dk.:</u> nechť $F(x) = \int u(x)v'(x)\,dx$;

$$\left[u(x)v(x) - F(x)\right]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - u(x)v'(x) = u'(x)v(x).$$

V. 4.2

tj. (PS) je prim. k integrandu vlevo;

<u>Příklady</u> 1 $\int \underbrace{x}_{u'} \cdot \underbrace{\ln x}_{v}\, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$ v $(0,\infty)$.

$u' = x$; $u = \frac{x^2}{2}$

$v = \ln x$, $v' = \frac{1}{x}$

$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$, n ; $n=1$: $\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x$

$$\underline{I_n} = \int 1 \cdot \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx = \frac{x}{(x^2+1)^n} - \int \frac{(-2n)\,x^2}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \int \frac{(x^2+1)-1}{(x^2+1)^{n+1}}$$

$u' = 1$; $u = x$

$v = \frac{1}{(x^2+1)^n}$; $v' = \frac{-n}{(x^2+1)^{n+1}} \cdot 2x$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \left\{ I_n - I_{n+1} \right\}$$

odtud: $I_{n+1} = \frac{1}{2n} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} \cdot I_n$ $\quad / n=1 \quad / n=2$

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{(x^2+1)} + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} x$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = I_3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{4} \cdot \left\{ \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \right\}.$$

Věta 5.3 (1. věta o substituci) Nechť $\int g(y)\,dy = G(y)$ v J, nechť $f(x): I \to J$ má vlastní derivaci v $\forall x \in I$. Potom

$$\int g(f(x))\,f'(x)\,dx = G(f(x)) \quad v\ I.$$

Dk. $G'(y) = g(y)$ v J;

$$[G(f(x))]' = G'(f(x)) \cdot f'(x) = g(f(x))\,f'(x) \quad v\ I.$$

V. 4.3

Příklady. (1) $\int x\, e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2x\, e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2}$; v $\mathbb{R}$.

$f(x) = x^2$; $f'(x) = 2x$

$g(y) = e^y$; $\int g(y)\,dy = e^y$

(2) $\int \cos^5 x\,dx = \int \cos^4 x \cdot \cos x\,dx = \int (1-\sin^2 x)^2 \cos x\,dx$

$f(x) = \sin x$; $f'(x) = \cos x$; $g(y) = (1-y^2)^2$

$$\int (1-y^2)^2\,dy = \int 1 - 2y^2 + y^4\,dy = y - \frac{2}{3} y^3 + \frac{y^5}{5}.$$

výsledek: $\sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x$ v $\mathbb{R}$.

Integrace racionálních funkcí

∀ polynom $Q(x)$ lze rozložit: $Q(x) = A \cdot \prod_{j=1}^{k} (x-a_j)^{p_j}$

$a_j \in \mathbb{C}$ kořeny násobnosti $p_j \in \mathbb{N}$;

$n =$ stupeň Q ... $k \le n$; $\sum_{j=1}^{k} p_j = \text{st}\, Q$

důsledky: • polynom (ne identicky nulový) má nejvýše konečně bodů, kde je roven 0.

• $p(x), q(x)$ polynomy a $p(x) = q(x)$ pro nekonečně x

$\Rightarrow$ p, q jsou shodné (mají stejné koeficienty)

$Q(x)$ má reálné koeficienty;

$a = \alpha + i\beta$ je kořen $\Rightarrow$ $\overline{a} = \alpha - i\beta$ je též kořen (stejné násobnosti)

$$(x-a)(x-\overline{a}) = x^2 - x(a+\overline{a}) + a\cdot\overline{a} = \underline{x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2}$$

polynom 2. stupně bez reálných kořenů. $(D<0)$

upravený rozklad: $Q(x)$ .. polynom s reálnými koeficienty lze rozložit

$$(*) \qquad Q(x) = A \cdot \prod_{j=1}^{m} (x-a_j)^{p_j} \prod_{k=1}^{m} (x^2 + b_k x + c_k)^{q_k}$$

kde $A, a_j, b_k, c_k \in \mathbb{R}$; $p_j, q_k \in \mathbb{N}$.

dvě komplexně sdružené kořeny.

Věta F. Nechť $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, kde $P(x), Q(x)$ jsou polynomy, st $P <$ st Q. Nechť $Q(x)$ má rozklad $(*)$. Pak existují jednoznačně určená čísla A_{jr}, B_{ks} a $C_{ks} \in \mathbb{R}$ tak, že

$$R(x) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{r=1}^{p_j} \frac{A_{jr}}{(x-a_j)^r} + \sum_{k=1}^{m} \sum_{s=1}^{q_k} \frac{B_{ks}x + C_{ks}}{(x^2 + b_k x + c_k)^s}$$

platí pro $\forall x$, $Q(x) \neq 0$.

Dk: vynecháváme, viz: Jarník, I1.

Obecný postup integrace $\frac{P(x)}{Q(x)} = f(x)$

1. pokud st $P \geq$ st Q .. dělením $R(x) = r(x) + \frac{\tilde{P}(x)}{Q(x)}$

   kde st $\tilde{P} <$ st Q.

2. $\frac{\tilde{P}(x)}{Q(x)}$ dále rozložím dle Věty F.

3. integruji členy rozkladu: $\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \begin{cases} \ln|x-a| & ; n=1 \\ \frac{-1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} & ; n \geq 2 \end{cases}$

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^p} = \underbrace{\frac{B}{2}\int \frac{(2x+b)\,dx}{(x^2+bx+c)^p}}_{I_1} + \left(C - \frac{bB}{2}\right)\underbrace{\int \frac{dx}{(x^2+bx+c)^2}}_{I_2}$$

$$I_1 = \int \frac{f'(x)\,dx}{[f(x)]^p} = \int \frac{dy}{y^p} \;..\; \text{snadno}$$

$y = f(x) = x^2+bx+c$

$dy = (2x+b)\,dx$

I_2 .. $x^2+bx+c = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \underbrace{c - \frac{b^2}{2}}_{>0:\ \text{ozn. } d^2} = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + d^2 =$

$$d\left[\left(\frac{x}{d} + \frac{b}{2d}\right)^2 + 1\right]$$

$$I_2 = \frac{1}{d}\int \frac{dx}{\left[\left(\frac{x}{d}+\frac{b}{2d}\right)^2+1\right]^p} = \int \frac{dy}{(y^2+1)^p} \;..\; \text{pomocí rekurentní vzorec}$$

$\frac{x}{d} + \frac{b}{2d} = y$

$\frac{1}{d}\,dx = dy$

Příklad. $\int \frac{3x}{x^3-1}\,dx = \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \sqrt{3}\,\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
v $(-\infty,1)$ a v $(1,\infty)$.

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$; V.F: $\frac{3x}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} \quad \forall x\neq 1$

$\exists!\,A,B,C$: $\quad / \cdot (x^3-1)$

$$3x = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)$$

platí pro nekonečně x
$\Rightarrow$ platí pro $\forall x\in\mathbb{C}$

neleznu B: dosazením $x=1$: $3 = A\cdot 3 \Rightarrow A=1$

$x=0$: $0 = A - C \Rightarrow C=1$

koeficienty u x^2: $0 = A + B$; $B=-1$.

$$\int\frac{3x}{x^3-1} = \int\frac{1}{x-1} + \int\frac{-x+1}{x^2+x+1} = \ln|x-1| +$$

$$\int\frac{-x+1}{x^2+x+1} = -\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{3}{2}\underbrace{\int\frac{dx}{x^2+x+1}}_{I_3} = -\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)$$

$$\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\cdot\int\frac{dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \underbrace{\frac{4}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\frac{2}{\sqrt{3}}}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$\frac{3}{4} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

Věta 5.4. (2. věta o substituci) Nechť $f(x): I\to\mathbb{R}$, nechť $\varphi(t): J\to I$ je vzájemně jednoznačná funkce, $\varphi'(t)$ existuje konečná a nenulová pro $\forall t\in J$.

Jestliže $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = G(t)$ v J

pak $\int f(x)\,dx = G(\varphi_{-1}(x))$ v I.

Dk.: platí: $G'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ pro $\forall t\in J$; $\varphi_{-1}'(x) = \frac{1}{\varphi'(\varphi_{-1}(x))}$ V.4.4.; předpoklad $\varphi'(t)\neq 0$.

$$[G(\varphi_{-1}(x))]' = G'(\varphi_{-1}(x))\cdot\varphi_{-1}'(x) = f(\varphi(\varphi_{-1}(x)))\,\varphi'(\varphi_{-1}(x))\cdot\frac{1}{\varphi'(\varphi_{-1}(x))} = f(x).$$

Poznámka o substituci

1. V. o S.: $$\int g(f(x))\, f'(x)\, dx = \int g(y)\, dy = G(y) = G(f(x))$$

$y = f(x)$

$dy = f'(x)\,dx$ ... $f(x)$ .. nemusí být prosté

2. V. o S.: $$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = F(t) = F(\varphi_{-1}(x)).$$

$x = \varphi(t)$ $\quad$ $t = \varphi_{-1}(x)$

$dx = \varphi'(t)\,dt$

$\varphi(t)$.. musí být prosté.

Typové substituce.

① $$\int R\left(x, \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx\,;$$ $R = R(u,v)$ je racionální fce pro u, v.

$$\sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t \qquad x = \frac{dt^s - b}{a - ct^s} = \varphi(t) \leftarrow \text{pozor na předpoklady V. 5.4}$$

$$ax+b = t^s(cx+d) \qquad \varphi'(t) = \dots \text{ racionální funkce!!}$$

$$x(a - ct^s) = dt^s - b$$

$$\rightsquigarrow \int \underbrace{R(\varphi(t), t)\,\varphi'(t)}_{\text{racionální funkce}}\,dt$$

Příklad:
$$\int \frac{dx}{x + 2\sqrt{x-1}} \quad \left| \begin{array}{l} \sqrt{x-1} = t \\ x-1 = t^2 \\ x = t^2+1 \\ dx = 2t\,dt \end{array} \right| = \int \frac{2t\,dt}{t^2+1+2\cdot t} = \int \frac{2t\,dt}{(t+1)^2} =$$

$x \in (0,1) \longleftrightarrow t \in (0,\infty)$ $\quad$ $$= 2\ln\left(1+\sqrt{x-1}\right) + \frac{2}{1+\sqrt{x-1}}$$

$\varphi(t) = t^2+1$ splní V. 5.4. $\quad$ v $(0,\infty)$.

V.F: $$\frac{2}{(t+1)^2} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{(t+1)^2} \quad \Big/ (t+1)^2$$

$$2 = A(t+1) + B \qquad \int \frac{2}{t+1} - \int \frac{2}{(t+1)^2} = 2\ln|t+1| + \frac{2}{t+1}$$

u t^0: $2 = A$

u t^1: $0 = A + B$

$B = -2$.

② $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$; $R = R(u,v)$ je racionální fce.

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\ ;\ x \in (-\pi,\pi)$$
$$x = 2\operatorname{arctg} t = \varphi(t)\ ;\ t \in \mathbb{R}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$
$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}\ ;\ \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt\ ;$$
$$\sin^2 = 1 - \cos^2$$

$$\cos x = \cos 2\cdot\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$$
$$= 2\cdot\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

analogicky: d.ú.

$$\sin x = \frac{2t}{t^2+1}.$$

substituce $\rightsquigarrow$ $\int \underbrace{R\left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{t^2+1}}_{\text{racionální funkce!!}}\,dt$

Příklad:
$$\int \frac{dx}{\cos x + 2} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\ ;\ x \in (-\pi,\pi) \\ x = 2\operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{2}{t^2+1}\,dt;\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+2}\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2}$$

$$= \int \frac{2\,dt}{(1-t^2)+2(1+t^2)} = \int \frac{2\,dt}{t^2+3} = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{2}{3}\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)$$

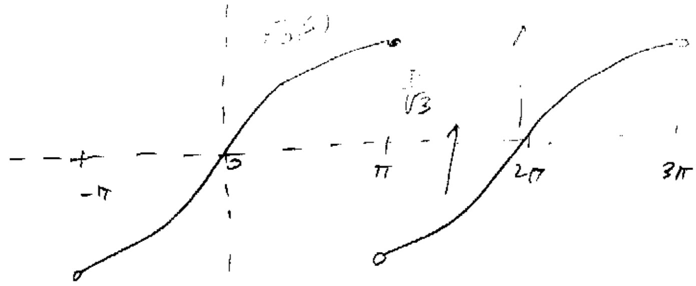
$$\int \underbrace{\frac{dx}{\cos x+2}}_{f(x)} = \underbrace{\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)}_{F_0(x)}\ ;\ x \in (-\pi,\pi).$$

$f(x), F_0(x)$ .. 2π - periodické
$\Rightarrow F_0'(x) = f(x)$ v každém $I = ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$.

$x=\pi$ „vadí" jediné použité substituci. $\lim\limits_{x\to\pi-} F_0(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$

$\operatorname{tg}\frac{x}{2} \to \infty$:
$$\lim_{x\to\pi+} F_0(x) = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

$$F(x) = \begin{cases} F_0(x); & x \in (-\pi,\pi) \\ \frac{\pi}{\sqrt{3}} & x = \pi \\ \frac{2\pi}{\sqrt{3}} + F_0(x); & x \in (\pi, 3\pi) \end{cases}$$



Tvrdíme, že $\int \frac{dx}{2+\cos x} = F(x)$ v $(-\pi, 3\pi)$.

$F'(x) = f(x)$ $\forall x \in (-\pi,\pi) \cup (\pi, 3\pi)$; $F(x)$.. spojitá v $(-\pi, 3\pi)$ $\downarrow$

? $F'(\pi) = f(\pi)$ zleva: $\lim\limits_{x \to \pi-} \frac{F(x) - F(\pi)}{x - \pi} \doteq f(\pi)$

obdobně zprava, stačí to jednoduše ověřit...

3 $\int R(e^{ax})\,dx = \quad \Big| \quad \underbrace{\int R(t) \cdot \frac{dt}{a \cdot t}}_{\text{racionální funkce.}}$

$e^{ax} = t \quad dx = \frac{dt}{at}$

$ax = \ln t$

$x = \frac{1}{a} \ln t$

4 $\int R(x, \sqrt{\underbrace{ax^2+bx+c}_{q(x)}})\,dx$; $R = R(u,v)$ je rac. fce

(α) $a<0$: BÚNO $q(x)$ má reálné kořeny (jinak $q(x)<0$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$ – není co integrovat)

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\lambda)(x-\mu)} =$$
$$= \sqrt{\frac{a(x-\lambda)}{x-\mu}} \cdot \sqrt{(x-\mu)^2} = \underbrace{\sqrt{\frac{a(x-\lambda)}{x-\mu}}}_{t \text{ (substit. typu 1)}} (\pm(x-\mu))$$

$\rightsquigarrow$ rac. funkci.

(β) $a>0$: <u>Eulerova substituce</u>

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a} \cdot x$$

- vede na integraci rac. fce
- $x = \varphi(t)$ je prosté na intervalech, kde $q(x) > 0$.

Poznámka. $F(x), f(x) : I \to \mathbb{C}$.

$F'(x) = f(x)$ značí $\{\mathrm{Re}\, F(x)\}' = \mathrm{Re}\, f(x)$, $\{\mathrm{Im}\, F(x)\}' = \mathrm{Im}\, f(x)$.

stejný význam má symbol $\int f(x)\,dx = F(x)$ v I.

---

(1) $\left[e^{ax}\right]' = a \cdot e^{ax}$; $\forall x \in \mathbb{R}$ pro $a \in \mathbb{R}$

snadno se zjistí i pro $a \in \mathbb{C}$; $a = \alpha + i\beta$

(2) $$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot \left[\cos\beta x + i \sin\beta x\right]$$

(3) $\left[e^{(\alpha+i\beta)x}\right]' = (\alpha+i\beta)e^{(\alpha+i\beta)x}$ .. ověřte rozkladem na Re, Im.

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\ ; \text{ položme } a = \alpha+i\beta\ ;\ \frac{1}{a} = \frac{\alpha - i\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

$$\int e^{(\alpha+i\beta)x}\,dx = \frac{\alpha-i\beta}{\alpha^2+\beta^2}\, e^{\alpha x}\left[\cos\beta x + i\sin\beta x\right]\ ;\ x \in \mathbb{R}$$

Re: $$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}\left[\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x\right]$$

Im: $$\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}\left[\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x\right]$$

Příklad: (Eulerovy substituce)

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx =$$