0. TERMÍN – 13.1.2012

Používáte-li nějakou složitější větu, není třeba formulovat znění, stručně však ověřte její předpoklady.

7\. **1.** [**7b**] Určete konkrétní hodnotu $\delta > 0$, aby funkce

$$f(x) = \left(1 + \sin\sqrt{x^3 + x^2}\right)^{\frac{1}{\cos(x^2)-1}}$$

byla definována na $P_-(0, \delta)$, a vypočítejte $\lim_{x\to 0-} f(x)$.

8\. **2.** [**8b**] Vypočítejte integrál

$$\int \frac{dx}{(1-\sqrt{x-1})^2(x+2\sqrt{x-1}+1)}$$

Na jakých intervalech výsledek platí?

6\. **3.** [**~~5~~b**] Najděte Taylorův polynom třetího stupně o středu 0 následujících funkcí:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2}{1+\ln(x+1)} \\ g(x) &= \exp(x^5) \\ h(x) &= \sqrt[3]{1+3x^2} \end{aligned}$$

Pomocí těchto Taylorových polynomů vypočtěte limitu:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\left[\frac{x^2}{1+\ln(x+1)} + \exp(x^5) - \sqrt[3]{1+3x^2}\right]$$

11\. **4.** [1~~2~~b] Je dána funkce

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x = 0 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{1-x^2}{|x|}\right), & x \neq 0 \end{cases}$$

Vyšetřete její průběh, a to zejména:

- definiční obor, sudost, lichost, periodicitu a jiné symetrie
- spojitost (body nespojitosti, maximální intervaly, kde je funkce spojitá)
- derivace, včetně jednostranných, všude, kde existují
- (maximální) intervaly, kde funkce roste, klesá
- body extrémů a lokálních extrémů, limity v krajních bodech definičního oboru a limity v $\pm\infty$, obor hodnot
- (maximální) intervaly, kde je funkce konvexní, konkávní, inflexní body
- načrtněte co nejpřesněji graf této funkce

1.příklad [7b]
==============

* přepis exp 1b
* vytknutí odm 3b
* rozšíření cos 2b
* výsledek 1b

2.příklad [8b]
==============

* intervaly 1b
* substituce 2b
* rac. fce 3b
* integrace 2b

3.příklad [6b]
==============

* zlomek 3b
* ostatní 2b
* limita 1b

4.příklad [11b]
===============

* sudost, spojitost 2b
* derivace 2+1b
* monotonie 2b
* extrémy, obor hodnot 2b
* druhá derivace + inflexe 2b

(1) $\sqrt{x^3+x^2} = |x| \cdot \sqrt{x+1} \in (0,1)$; $x \in (-1,0) = P(0,1)$.

$\sin\sqrt{} > 0$;

$\cos x^2 \neq 1$, neboť $x^2 \in (0,1) \notin 2k\pi$.

$f(x) = \exp h(x)$; $h(x) = \dfrac{1}{\cos x^2 - 1} \ln\left(1 + \sin\sqrt{x^3+x^2}\right)$.

$$= \frac{x^4}{\cos x^2 - 1} \cdot \frac{\ln\left(1+\sin\sqrt{x^3+x^2}\right)}{\sin\sqrt{x^3+x^2}} \cdot \frac{\sin\sqrt{x^3+x^2}}{\sqrt{x^3+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^3+x^2}}{x^4}$$

$$= P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot P_4$$

$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1-\cos y}{y^2} \to \dfrac{1}{2},\ y \to 0 \\ x^2 \to 0;\ x \to 0-; \\ x^2 \neq 0;\ x \in P(0) \end{array}\right\} \Rightarrow P_1 \to -2,$ dle VoLSF, VoAL

$\dfrac{\ln(1+y)}{y} \to 1,\ y \to 0$

$\left.\begin{array}{l} \sqrt{x^3+x^2} = |x|\sqrt{x+1} \to 0,\ x \to 0- \\ \quad \text{spojitost } |\cdot|, \sqrt{\cdot} \\ \sqrt{x^3+x^2} \in (0,1);\ \text{tedy } \sin\sqrt{} \in (0, \sin 1); \\ \quad \text{speciálně } \sin\sqrt{x^3+x^2} \neq 0;\ x \in P(0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow P_2 \to 1$ VoLSF podobně $P_3 \to 1$; neboť $\frac{\sin y}{y} \to 1$, $y \to 0$

$$P_4 = \frac{|x|\sqrt{1+x}}{x^4} \underset{\substack{\uparrow \\ x\in P(0)}}{=} \frac{-x\sqrt{1+x}}{x^4} = \frac{1}{-x^3}\cdot\sqrt{1+x} \to +\infty\cdot 1 = +\infty$$

$x \to 0-$

neboť: $-x^3 \to 0$; $x \to 0-$

$-x^3 > 0$, $x \in P(0)$

celkem tedy: $h(x) = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot P_4 \to -2\cdot 1\cdot 1\cdot(+\infty)$

$= -\infty$

dle VoAL,

a tedy $f(x) = e^{h(x)} \to 0$,

dle vlastností exp.

(2) nutno $x-1\geq 0$; tj. $x \geq 1$.

odtud $x+2\sqrt{x-1}+1 \geq 2$

a dále $1-\sqrt{x-1} \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$.

$\Rightarrow$ maximální otevřené intervaly: $(1,2), (2,+\infty)$.

---

subst.: $t=\sqrt{x-1}$; $x\in(1,2) \longleftrightarrow t\in(0,1)$

$x=t^2+1$ $\qquad (2,+\infty) \qquad (1,+\infty)$.

$dx = 2t\,dt$

vede na

$$\int g(t)\,dt; \qquad g(t)=\frac{2t}{(t-1)^2(t^2+2t+2)}.$$

$$g(t)=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{(t-1)^2}+\underbrace{\frac{Ct+D}{t^2+2t+2}}_{I} \;\ldots\; A=\frac{2}{25},\ B=\frac{2}{5},\ C=-\frac{2}{25},\ D=\frac{-16}{25}$$

$$25I=\frac{-2t-16}{t^2+2t+2} = -\underbrace{\int\frac{(2t+2)\,dt}{t^2+2t+2}}_{\ln(t^2+2t+2)}+(-14)\underbrace{\int\frac{dt}{(t+1)^2+1}}_{\mathrm{arctg}(t+1)}.$$

celkem: $\frac{2}{25}\ln\left|\sqrt{x-1}-1\right| - \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{(\sqrt{x-1}-1)^2}$

$-\frac{1}{25}\ln\left(x+2\sqrt{x-1}+1\right) - \frac{14}{25}\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{x-1}+1\right)$; $x\in(1,2)$, $(2,+\infty)$.

(3) $e^y = 1+y+o(y)$

$e^{x^5} = 1+\underbrace{x^5+o(x^5)}_{o(x^3)}$; tedy $T^g_{0,3} = 1$

$\sqrt[3]{1+y} = 1+\frac{1}{3}y+\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}-1\right)}_{-1/9}y^2+o(y^2)$

$\sqrt[3]{1+3x^2} = 1+x^2\underbrace{-x^4+o((3x^2)^2)}_{o(x^3)}$

tedy: $T^h_{0,3} = 1+x^2.$

---

označme: $f(x) = A+Bx+Cx^2+Dx^3+o(x^3)$, $x\to 0$.

víme, že $1+\ln(1+x) = 1+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$

tedy: $x^2 = f(x)\cdot[1+\ln(1+x)]$

$x^2 = (\cancel{A+Bx}+Cx^2+Dx^3+o(x^3))\cdot(1+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3))$

---

musí $A=B=0$.

x^2: $1=C$

x^3: $0=C+D \Rightarrow D=-1.$

$\Rightarrow T^f_{0,3} = x^2-x^3$;

výpočet limity:

$$\frac{1}{x^3}\left[f(x) + g(h) - h(x) \right]$$

$$= \frac{1}{x^3}\left[x^2 - x^3 + 1 - (1+x^2) + o(x^3) \right]$$

$$= \frac{-x^3 + o(x^3)}{x^3} = -1 + o(1) \to -1 \; ; \; x \to 0.$$

(4) $f(x)$ je všude; spojité v $(-\infty, 0), (0, +\infty)$
(složení spojitých fcí $\frac{1}{|x|}$, $1-x^2$, $\operatorname{arctg}(y)$).

$x \to 0$: $\frac{1}{|x|} \to +\infty$; $1-x^2 \to 1$; $\Rightarrow f(x) \to \frac{\pi}{2} = \lim_{y \to +\infty} \operatorname{arctg} y$

$\Rightarrow$ $f(x)$ spojité také v bodě $x = 0$;
je tedy spojité všude v $\mathbb{R}$. Není periodické.

<u>Derivace</u>: nejprve $x \in (0, +\infty)$: $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1-x^2}{x}\right)$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1-x^2}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{1-x^2}{x}\right)' = \dots - \frac{x^2+1}{x^4 - x^2 + 1} \; ;$$

[obecněji by vyšlo: $f'(x) = \frac{-(x^2+1)\cdot \operatorname{sgn} x}{x^4 - x^2 + 1}$; leč působíme na $(0, +\infty)$]

čitatel $x^4 - x^2 + 1 = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow f'(x) < 0\,;\ x \in (0,+\infty) \\ &f \text{ spojitá v } [0,+\infty) \end{aligned}\right\} \Rightarrow f \text{ klesá v } [0,+\infty).$$

---

dále: $f'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{-(x^2+1)}{x^4-x^2+1} = -1.$

---

díky sudosti: $f'_-(0) = 1$; ergo $f'(0) \nexists$

f roste v $(-\infty, 0]$.

$x=0$: (ostré) globální maximum

$\nexists$ minimum

$f(\mathbb{R}) = (L, f(0)]$; $L = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$

$f(0) = \frac{\pi}{2}$.

Druhá derivace: $x \in (0,+\infty)$.

$$f''(x) = \frac{2x\left(x^4+2x^2-2\right)}{\left(x^4-x^2+1\right)^2},$$

$x^4 + 2x^2 - 2 = 0$

$x^2 = -1 \pm \sqrt{3}$

$x_1 = \sqrt{\sqrt{3}-1} \doteq 0.86$

$f'' > 0: x \in (x_1, +\infty)$

$< 0: x \in (0, x_1)$.

$\Rightarrow$ f (ryze) konkávní na $[0, x_1]$
konvexní $[x_1, +\infty)$

x_1 je inflexní bod

sudost $\Rightarrow$ f (ryze) konkávní na $[-x_1, 0]$
konvexní na $(-\infty, -x_1]$

$-x_1$ inflexní bod

dokonce f ryze konkávní na $[-x_1, x_1]$
(zlom v $x=0$ „menším směrem").