Používáte-li nějakou složitější větu, není třeba formulovat znění, stručně však ověřte její předpoklady. – Postup výpočtu komentujte; celkový výsledek a důležité mezivýsledky zvýrazňujte. – Odevzdávejte prosím všechny použité výpočty.

---

1. [8b] Najděte $\delta > 0$, aby funkce f^g, kde

$$f(x) = \big(\exp(-x) - x\big)$$
$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2x^2 + x - 3\cos x} - \sqrt{x^2 + x + 3\sin x}}$$

byla definována na $P(-\infty, \delta)$. Vypočítejte limitu f^g pro $x \to -\infty$.

---

2. [8b] Najděte maximální *otevřené* intervaly, na nichž je definována funkce

$$f(x) = \frac{\ln(x + 4 + \sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}(x + 2 - 2\sqrt{x+1})}$$

Vypočítejte $\int f(x)dx$. (Nápověda: odstraňte ln per-partes.)

---

3. [7b] Najděte Taylorův polynom čtvrtého stupně o středu 0 následujících funkcí:

$$f(x) = 1/\sqrt{\cos 2x}$$
$$g(x) = \frac{\sin x \cdot \ln(1 + x^2)}{x}$$
$$h(x) = \exp(x^2)$$

Pomocí těchto Taylorových polynomů vypočtěte limitu:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - \exp(x^2)}{x^2 - g(x)}$$

---

4. [9b] Je dána funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2|\sin x| - 1}\right)$$

Vyšetřete její průběh, tedy zejména:

- definiční obor, sudost, lichost, periodicitu a jiné symetrie, spojitost
- limity (jednostranné) v krajních bodech definičního oboru
- derivace, včetně jednostranných, všude, kde existují; nulové body derivace
- (maximální) intervaly, kde funkce roste, klesá
- lokální extrémy, globální extrémy; obor hodnot

Načrtněte co nejpřesněji graf této funkce.

Nevyšetřujte: f'', konvexitu, inflexní body.

```
1.příklad                       8b
---------

vytknutí logaritmu, lim. xe^x   2b
rozdíl odmocnin, vytknutí       2b
omezená x jde do nuly           2b
okolí, výsledek celkem          2b


        špatná absolutní hodnota −1b
        ,,částečné limity‘‘      −2b
        drobná num. chyba        −1b

============================================================

2.příklad                       8b
---------

určení intervalů                1b
derivace                        1b
substituce & úprava             2b
rozklad, int. rac. fce          4b

        chybějící intervaly: −1
        num. chyba, která nezlehčí příklad: −1 (max −2 celkem)
        num. chyba, která příklad zlehčí: až −50%
============================================================

3.příklad                       7b
---------

Taylor f                        3
Taylor h                        2
limita                          2

============================================================
4.příklad                       9b
---------

limity v pi/6                   2
derivace                        1
limity derivace                 2
intervaly monotonie             2
extrémy, obor hodnot            2



        perioda, spojitost      −1
        numerické chyby         −1/−3
        špatný obrázek          −1
        nedostatečné zdůvod.    −1
```

(1) $f(x) = \exp h(x)$; $h(x) = \dfrac{\ln\left(e^{-x} - x\right)}{\sqrt{2x^2+x-3\cos x} - \sqrt{x^2+x+3\sin x}}$

čitatel: $\ln e^{-x}\left(1 - xe^{x}\right) = -x + \ln(1 - \underbrace{xe^{x}}_{\to 0;\ x\to-\infty})$

jmenovatel: $\sqrt{} - \sqrt{} = \dfrac{2x^2+x-3\cos x - (x^2+x+3\sin x)}{\sqrt{} + \sqrt{}}$

$= \dfrac{x^2 - 3(\cos x + \sin x)}{|x|\left(\sqrt{2+\frac{1}{x} - \frac{3\cos x}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{3\sin x}{x^2}}\right)}$; $|x| = -x$ na $P(-\infty)$

celkem: $h(x) = \dfrac{\left(-x + \ln(1 - xe^{x})\right)\cdot(-x)\left(\sqrt{2+o(1)} + \sqrt{1+o(1)}\right)}{x^2 - 3(\cos x + \sin x)}$

$= \dfrac{\left(-1 + \frac{1}{x}\ln(1 - xe^{x})\right)\cdot(-1)\cdot\left(\sqrt{2+\ldots} + \sqrt{1+\ldots}\right)}{1 - \frac{3}{x^2}(\cos x + \sin x)} \to \sqrt{2}+1$ dle VoAL.

$\cos x, \sin x$ ... omezené na $P(-\infty)$

$\frac{1}{x} \to 0$; $x \to -\infty$: $\frac{\cos x}{x^2}, \frac{\sin x}{x^2} \to 0$;

$x \to \infty$

celkem: $f(x) \to e^{1+\sqrt{2}}$.

vnější okolí: $\qquad e^{-x} - x > 0 \quad \forall x < 0.$

$x^2 + x = x(x+1) > 6$ pro $x < -3$; neboť

$$\begin{array}{r} x < -3 \\ x+1 < -2 \\ \hline \Rightarrow\ x(x+1) > 6 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + x + 3\underbrace{\sin x}_{\geq -1} > \cancel{x}6 - 3 > 0$$

$2x^2 + x + 3\cos x > 0$, podobně.

$$\sqrt{2x^2 + x - 3\cos x} > \sqrt{x^2 + x + 3\sin x}$$

$$2x^2 + x - 3\cos x > x^2 + x + 3\sin x$$

$$x^2 > 3(\sin x + \cos x)$$

$\uparrow$ aspoň 9 $\qquad \uparrow$ nejvíce $3 \cdot (+2) = +6$

---

stačí volit $\delta < \frac{1}{3}$.

(2) $x+1>0: \quad x \in (-1,+\infty) \dots$

$x+4+\sqrt{x+1} > 0$ pro $x>-1$.

$x+2 = 2\sqrt{x+1}$

$(x+2)^2 = 4(x+1)$ $\Rightarrow$ intervaly $(-1,0), (0,+\infty)$

$x^2 = 0$.

$u = \ln\left(x+4+\sqrt{x+1}\right)$

$$u' = \frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x+4+\sqrt{x+1}} = \frac{2\sqrt{x+1}+1}{\left(x+4+\sqrt{x+1}\right)2\sqrt{x+1}}$$

$$\int v'\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}\left(x+2-2\sqrt{x+1}\right)} \quad \Bigg| \begin{array}{l} \sqrt{x+1} = t \\ x = t^2-1 \\ dx = 2t\,dt \end{array}$$

$$= \int \frac{1}{t\left(t^2+1-2t\right)} \cdot 2t\,dt = \int \frac{2\,dt}{(t-1)^2} = \frac{-2}{t+1} = \frac{-2}{\sqrt{x+1}-1}$$

---

per partes: $\int f(x)\,dx = \dfrac{-2\ln\left(x+4+\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}-1} + I$;

$$I = -\int u'v = \int \frac{2\left(2\sqrt{x+1}+1\right)dx}{\left(x+4+\sqrt{x+1}\right)2\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}-1\right)}$$

$t = \sqrt{x+1}$

$x = t^2-1$ jako výše:

$dx = 2t\,dt$

$$= \int \frac{(2t+1)\, 2\cancel{t}\, dt}{(t^2+t+3)\,\cancel{t}\,(t-1)} = \int h(t)\,dt;$$

$$h(t) = \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+t+3}; \quad A = \frac{6}{5},\ B = -\frac{6}{5}$$

$$C = \frac{8}{5}$$

$$\int h(t)\,dt = \frac{6}{5}\ln|t-1| - \frac{3}{5}\ln(t^2+t+3) + \frac{2\sqrt{11}}{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{11}}\right).$$

---

celkem: $$\int f(x)\,dx = \frac{-2\ln(x+4+\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}-1} + \frac{6}{5}\ln|\sqrt{x+1}-1|$$

$$-\frac{3}{5}\ln(x+4+\sqrt{x+1}) + \frac{2\sqrt{11}}{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{11}}\right)$$

$$x \in (-1,0);\ (0,+\infty).$$

Pozn.: přímo subst. $t=\sqrt{x+1}$: $\int f(x)\,dx = \int \frac{2\ln(t^2+t+3)}{(t-1)^2}\,dt$

$$\underset{\text{p.p.}}{=} -\frac{2\ln(t^2+t+3)}{t-1} + \int h(t)\,dt$$

stejné jako výše.

(3) $(1+y)^a = 1 + ay + \frac{a(a-1)}{2} y^2 + o(y^2)$; $y \to 0$

tedy $(1+y)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} y + \frac{3}{8} y^2 + o(y^2)$

$\cos x = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 + o(x^4)$; $x \to 0$

odtud $\cos 2x = 1 \underbrace{- 2x^2 + \frac{2}{3} x^4 + o(x^4)}_{y}$;

y ; $y \sim x^2$; $x \to 0$

$y = -2x^2 + o(x^2)$

$$(\cos 2x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\left(-2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right) + \frac{3}{8}\underbrace{\left(-2x^2 + o(x^2)\right)^2}_{4x^4 + o(x^4)} + o(x^4)$$

$= 1 + x^2 + \frac{7}{6} x^4 + o(x^4)$;

tedy $T^f_{0,4} = 1 + x^2 + \frac{7}{6} x^4$

$\sin x = x - \frac{1}{6} x^3 + o(x^3)$, $x \to 0$

$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{6} x^2 + o(x^2)$;

$\ln(1+y) = y - \frac{1}{2} y^2 + o(y^2)$; $y \to 0$

$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{1}{2} x^4 + o(x^4)$,

$g(x) = \left(1 - \frac{1}{6} x^2 + o(x^2)\right) \cdot \left(x^2 - \frac{1}{2} x^4 + o(x^4)\right)$

$= x^2 - \frac{2}{3} x^4 + o(x^4)$, $x \to 0$; tj. $T^g_{0,4} = x^2 - \frac{2}{3} x^4$.

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4); \quad x \to 0;$$

$$\frac{f(x) - e^{x^2}}{x^2 - g(x)} = \frac{1 + x^2 + \frac{7}{6}x^4 - \left(1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4\right) + o(x^4)}{x^2 - \left(x^2 - \frac{2}{3}x^4\right) + o(x^4)}$$

$$= \frac{4/6\, x^4 + o(x^4)}{2/3\, x^4 + o(x^4)} = \frac{2/3 + o(1)}{2/3 + o(1)} \to 1\,;\; x \to 0.$$

(4) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2|\sin x| - 1}\right)$; sudé, π-periodické, symetrická vůči $x = \frac{\pi}{2}$.

$\sin x \neq \pm 1$: $x \neq \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \pm k\pi$

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi\}$.

spojité; omezené v $\mathcal{D}(f)$.

stačí vyšetřit $x \in [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\}$: $|\sin x| = \sin x \geq 0$

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2\sin x - 1}\right)$$

$$f(0) = f(\pi) = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4} \doteq -0.8$$

$x \to \frac{\pi}{6}+$: $2\sin x - 1 \to 0$ $\Rightarrow \frac{1}{2\sin x - 1} \to +\infty$

<0 na $P_+(\frac{\pi}{6})$

$f(x) \to \frac{\pi}{2} \doteq 1.6$

$x \to \frac{\pi}{6}-$: $f(x) \to -\frac{\pi}{2}$

$x \to \frac{5\pi}{6}-$: $f(x) \to \frac{\pi}{2}$.

$x \in (0, \pi) \setminus \{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\}$: $f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2\sin x - 1}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{2\sin x - 1}\right)'$

$$= \frac{-2\cos x}{(2\sin x - 1)^2 + 1}.$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$; $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{4}$.

$$\lim_{x \to 0+} f'(x) = \frac{-2}{(-1)^2 + 1} = -1 = f'_+(0) ;$$

ze sudosti $f'_-(0) = 1$; tedy $f'(0)$ $\nexists$

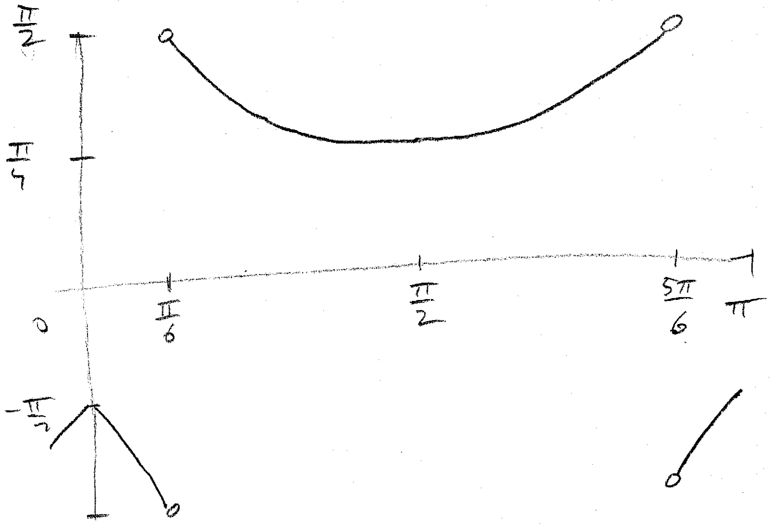
---

obecně $f'(x) = \frac{-2\cos x \cdot \operatorname{sgn}(\sin x)}{(2|\sin x| - 1)^2 + 1}$; $\nexists f'(k\pi)$.

v okolí bodů: $x=\frac{\pi}{6}$: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}\pm} f'(x) = -2\cos\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$

$\doteq -1.7$

$x=\frac{5\pi}{6}$: $\lim\limits_{x\to\frac{5\pi}{6}} f'(x) = \sqrt{3} \doteq 1.7$.



monotonie: $f(x)$ klesá na $[0,\frac{\pi}{6}), (\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$,

roste na $[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}), (\frac{5\pi}{6},\pi]$

$x=k\pi$: ostré lok. max.

$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$: ostré lok. min

$H(f) = \left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow \nexists$ globální extrémy.