3. TERMÍN – 7.2.2012

Používáte-li nějakou složitější větu, není třeba formulovat znění, stručně však ověřte její předpoklady. – Postup výpočtu komentujte; celkový výsledek a důležité mezivýsledky zvýrazňujte. – Odevzdávejte prosím všechny použité výpočty.

---

1. [7b] Vypočítejte limitu f^g („ef na gé“) pro $x \to +\infty$, kde

$$f(x) = \frac{\ln \sqrt{x}}{1 + \ln \sqrt{x}}, \qquad g(x) = \frac{\sin x - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} - \sin x}$$

---

2. [9b] (a) Najděte maximální *otevřené* intervaly, na nichž je definována funkce

$$f(x) = \frac{1}{(2 + \sin x)(2 + \sin x + \cos x)}$$

(b) Vypočítejte $\int f(x)dx$ pomocí standardní substituce. Kde výsledek platí?
(c) Pomocí nalepování najděte primitivní funkci k $f(x)$ na intervalu $(-\pi, 3\pi)$.

---

3. [6b] (a) Najděte Taylorův polynom druhého stupně o středu 0 pro funkce (je-li třeba, funkce dodefinujte spojitě pro $x = 0$):

$$f(x) = \frac{x}{\ln(1 + x)}$$

$$g(x) = (\sin x)(\operatorname{tg} x)$$

(b) Pomocí těchto Taylorových polynomů najděte konstantu b takovou, aby limita

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 1 - bx}{g(x)}$$

byla *konečná a nenulová*. Tuto limitu s příslušným b také vypočtěte.

---

4. [10b] Je dána funkce

$$f(x) = \frac{x}{4} + \operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{x^2 - 1}\right)$$

Vyšetřete její průběh, tedy zejména:

- definiční obor, sudost, lichost, periodicitu a jiné symetrie, spojitost
- spočtěte limity (jednostranné) v krajních bodech definičního oboru a v $\pm\infty$
- derivace, včetně jednostranných, všude, kde existují; nulové body derivace
- dodefinujte f v $x = \pm 1$ tak, aby zde byla spojitá *zprava* a pak spočítejte $f'_+(\pm 1)$
- najděte (maximální) intervaly, kde funkce roste, klesá
- určete lokální extrémy, globální extrémy; obor hodnot
- vyšetřete konvexitu/konkávnost, inflexní body

Načrtněte co nejpřesněji graf této funkce.

Nápomoc: přibližně $\pi/2 = 1.57$, $f(\sqrt{7}) = 1.38$.

```
1.příklad                       7b
---------

část P_1                        2
vytknutí x^a z f                2
P_3: omezená x jde do nuly      1
finální ln(x) vs. x^(1/6)       2



        ,,částečné limity‘‘      −2
        drobná num. chyba        −1 (kumulativně max −3b)


============================================================

2.příklad                       9b
---------

určení intervalů                1
substituce & úprava             2
rozklad, int. rac. fce          4
nalepení                        2

        chybějící intervaly: −1
        num. chyba, která nezlehčí příklad: −1 (max −3 celkem)
        num. chyba, která příklad zlehčí: až −50%
============================================================

3.příklad                       6b
---------

Taylor f                        3
Taylor h                        1
limita                          2

============================================================
4.příklad                       10b
---------

lichost & spojitost             1
limity                          1
derivace                        1
dodefinování +−1+               1
intervaly monotonie             2
extrémy, obor hodnot            2
konvexita                       2



        perioda, spojitost      −1
        numerické chyby         −1/−3
        špatný obrázek          −1
        nedostatečné zdůvod.    −1
        nekonzistence           až −3
```

① $f^g = \exp h$; $h(x) = \ln f(x) \cdot g(x)$; $x \to +\infty$

$$\frac{\ln\sqrt{x}}{1+\ln\sqrt{x}} = \frac{\frac{1}{2}\ln x}{1+\frac{1}{2}\ln x} = \frac{\ln x}{2+\ln x} = 1 - \frac{2}{\underbrace{2+\ln x}}$$

$\to 0$; $x \to +\infty$.
dle VoAL;
$(\ln x \to +\infty)$

$$\frac{\sin x - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} - \sin x} = \frac{\sin x - x^{1/2}}{x^{1/3} - \sin x} = \frac{x^{1/2}\left(\frac{\sin x}{x^{1/2}} - 1\right)}{x^{1/3}\left(1 - \frac{\sin x}{x^{1/3}}\right)}$$

$$\frac{x^{1/2}}{x^{1/3}} = x^{1/6}$$

$$h(x) = \frac{\ln\left(1 - \frac{2}{2+\ln x}\right)}{-\frac{2}{2+\ln x}} \cdot \frac{-2x^{1/6}}{2+\ln x} \cdot \frac{\frac{\sin x}{x^{1/2}} - 1}{1 - \frac{\sin x}{x^{1/3}}} = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3$$

$P_1 \to 1$, neboť: $\frac{\ln(1+y)}{y} \to 1$; $y \to 0$

$\frac{-2}{2+\ln x} \to 0$

$\neq 0$; $x \in \mathcal{P}(+\infty)$.

(V. 2.4)

$\sin x$ ... omezené na $\mathcal{P}(+\infty)$

$\frac{1}{x^{1/2}}, \frac{1}{x^{1/3}} \to 0$

$\Rightarrow \frac{\sin x}{x^{1/2}}, \frac{\sin x}{x^{1/3}} \to 0$

$\Rightarrow P_3 \to -1$.

ad P_2:

$$P_2 = \frac{x^{1/6}}{\ln x} \cdot \frac{-2}{\left(\frac{2}{\ln x}+1\right)} \to +\infty \cdot \left(\frac{-2}{\frac{2}{+\infty}+1}\right) = -\infty$$

dle VoAL a věčl. limity: $\frac{x^a}{\ln x} \to +\infty$

$x \to +\infty$; pro $\forall a > 0$.

---

celkem tedy: $h(t) \to 1 \cdot (-\infty) \cdot (-1) = +\infty$

$f^g \to +\infty$; dle VoAL; VoLSF.

(2) $2+\sin x \geq 2-1=1$;

$2+\sin x+\cos x \geq 2-1-1=0$; leč $\sin x=-1$
$\cos x=-1$

nenastane zároveň; $\boxed{I=\mathbb{R}}$

$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; $x\in(-\pi,\pi) \longleftrightarrow t\in\mathbb{R}$

$$dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}; \quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\left(2+\frac{2t}{1+t^2}\right)\cdot\left(2+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2}=\int g(t)\,dt \; ; t\in\mathbb{R}$$

$$g(t)=\frac{t^2+1}{(t^2+t+1)(t^2+2t+3)}=\frac{At+B}{t^2+t+1}+\frac{Ct+D}{t^2+2t+3}=g_1+g_2$$

$$t^2+1=(At+B)(t^2+2t+3)+(Ct+D)(t^2+t+1)$$

$$A=-\frac{2}{3};\ B=-\frac{1}{3};\ C=\frac{2}{3};\ D=2 \checkmark$$

$$\int g_1=-\frac{1}{3}\int\frac{2t+1}{t^2+t+1}\,dt=\underline{-\frac{1}{3}\ln(t^2+t+1)}; \quad t\in\mathbb{R}$$

$$\int g_2=\frac{1}{3}\int\frac{2t+2}{t^2+2t+3}\,dt+\frac{4}{3}\int\frac{dt}{t^2+2t+3}=\frac{1}{3}\ln(t^2+2t+3)+\frac{4}{3}I;$$

$$I=\int\frac{dt}{(t+1)^2+2}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\left(\frac{t+1}{\sqrt2}\right)^2+1}=\frac{1}{\sqrt2}\operatorname{arctg}\left(\frac{t+1}{\sqrt2}\right); \quad t\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \int g(t)\,dt=\frac{1}{3}\ln\frac{t^2+2t+3}{t^2+t+1}+\frac{2\sqrt2}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{t+1}{\sqrt2}\right); \quad t\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \int f(x)\,dx = F_0(x) := \frac{1}{3}\ln\left(\frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}\right)+\frac{2\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{2}}\right)$$

$x \in (-\pi, \pi)$ dle substituce;

$x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$; $k \in \mathbb{Z}$ – díky 2π–periodě...

---

nalepení pro $x \to \pi$: $f(x)$ je zde spojitá.

$x \to \pi-$: $\operatorname{tg}\frac{x}{2} \to +\infty$;

$$\ln\left(\quad\right) = \ln\left(\frac{1+\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+\frac{3}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}}{1+\ \cdots}\right) \to \ln 1 = 0$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}(\ldots) \to \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{3}.$$

---

podobně: $F_0(x) \to -\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$, $x \to \pi+$.

---

tedy funkce:

$$F(x) = \begin{cases} F_0(x); & x \in (-\pi, \pi) \\ \frac{\sqrt{2}\pi}{3}; & x = \pi \\ 2\frac{\sqrt{2}\pi}{3} + F_0(x); & x \in (\pi, 3\pi) \end{cases}$$

je spojitá v $x = \pi$; a tedy

(dle Lemmatu 6.3): $\int f(x)\,dx = F(x)$; $x \in (-\pi, 3\pi)$

(3) $$\frac{x}{\ln(1+x)} = A + Bx + Cx^2 + o(x^2)\ ;\ x \to 0$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$x = \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right) \cdot \left(A + Bx + Cx^2 + o(x^2)\right)$$

koeficienty: x^0 : nic

x^1: $1 = A$

x^2: $0 = B - \frac{1}{2}A$: $\to$ $B = \frac{1}{2}$

x^3: $0 = C - \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}A \to C = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}$

$$\sin x \cdot \operatorname{tg} x = (x + o(x)) \cdot (x + o(x)) = x^2 + o(x^2)$$

---

tedy: $T_{0,2}^{f} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^2$; $T_{0,2}^{g} = x^2$

$$\frac{f(x) - 1 - bx}{g(x)} = \frac{1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^2 - (1 + bx)}{x^2 + o(x^2)}$$

volme $b = \frac{1}{2}$

$$= \frac{-\frac{1}{12}x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{-\frac{1}{12} + o(1)}{1 + o(1)} \to -\frac{1}{12}, \quad x \to 0.$$

(4) $f(x) = \frac{x}{4} + \operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)$; **liché**

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} = (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty) = I_1 \cup I_2 \cup I_3$.

spojitá v každém bodě $D(f)$ .. arctg y spoj. v $\mathbb{R}$

rac. fce spoj. mimo $x = \pm 1$.

$$\frac{2x}{x^2-1} = \frac{2}{x - \frac{1}{x}} \to \frac{2}{\pm\infty - \frac{1}{\pm\infty}} = 0 \; ; \quad x \to \pm\infty$$

$$f(x) \to \pm\infty + 0 \; ; \quad x \to \pm\infty .$$

$x \to 1+ :$ $\quad x^2 - 1 \to 0$, >0 na $P_+(1)$: $\quad \frac{2x}{x^2-1} \to \frac{2 \cdot 1}{0+} = +\infty$

$$f(x) \to \frac{1}{4} + \frac{\pi}{2} \doteq 1.82$$

$x \to 1- :$ podobné úvahy: $\quad f(x) \to \frac{1}{4} - \frac{\pi}{2} \doteq -1.32$

$x \to -1\pm$: (lichá fce) $\quad f(x) \to -\frac{1}{4} \pm \frac{\pi}{2}$

---

derivace: $\forall x \neq \pm 1$ dle standardních vzorců: $(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{1+y^2}$

$$f'(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{1+\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)^2} \cdot \frac{-2(x^2+1)}{(x^2-1)^2} \qquad \left(\frac{2x}{x^2-1}\right)' = \frac{-2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{-2(x^2+1)}{(x^2-1)^2 + 4x^2} = \frac{1}{4} - \frac{2}{x^2+1} = \frac{x^2-7}{4(x^2+1)} .$$

$$(x^2-1)^2 + 4x^2 = x^4 - 2x^2 + 1 + 4x^2 = x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2+1)^2$$

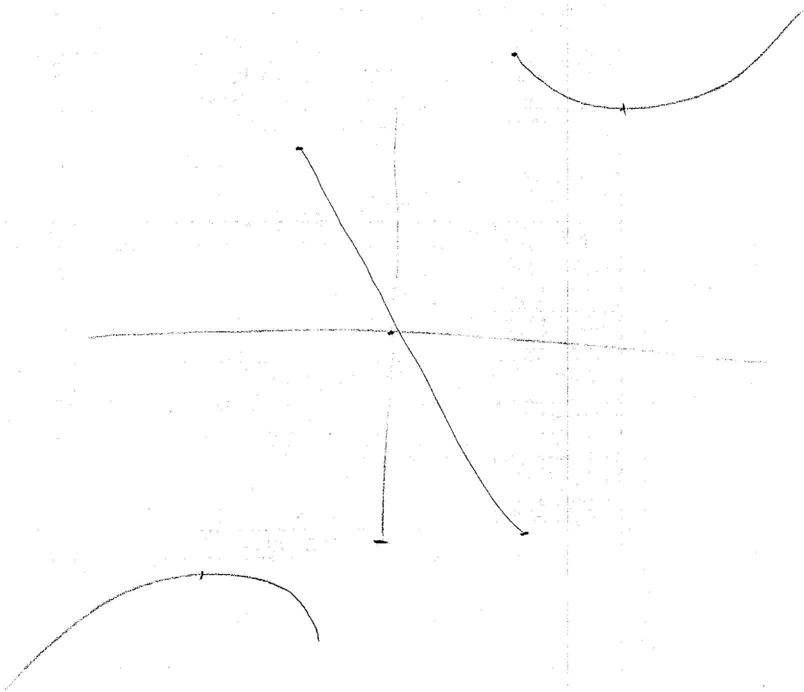
$\Rightarrow$ $f(t)$ klesá v I_2

klesá v $(1, \sqrt{7}]$; roste v $[\sqrt{7}, +\infty)$

roste v $(-\infty, -\sqrt{7}]$; klesá v $[-\sqrt{7}, -1)$

$f(\sqrt{7}) \doteq 1.38 > f$

$\frac{\pi}{2} \doteq 1.57$;



$x = \pm\sqrt{7}$: lokální min. / max.

globální extrémy $\nexists$ $\left(\lim_{x\to\pm\infty} f(t) = \pm\infty\right)$

$$\mathcal{H}(f) = f(I_1) \cup f(I_2) \cup f(I_3)$$

$$= (-\infty, f(-\sqrt{7})] \cup \left(\frac{1}{4} + \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\right)$$

$$\cup [f(\sqrt{7}), +\infty).$$

---

spojité dodefinování: $f(1) = \lim_{x\to 1+} f(t) = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{2}$

podle V. 6.6: $f'_+(1) = \lim_{x\to 1+} f'(t) = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$

---

podobně $f(-1) = \lim_{x\to -1+} f(t) = -\frac{1}{4} + \frac{\pi}{2}$; $f'_+(-1) = -\frac{3}{4}$

konvexita: $f''(x) = \left(-2(x^2+1)^{-1}\right)' = 4x\cdot(x^2+1)^{-2}$

$x \neq \pm 1$

$x\in I_1$: $f''(x)<0$: $f(x)$ konkávní

$x\in I_3$: $f''(x)>0$: $f(x)$ konvexní

$x\in(-1,0)$: $f''(x)<0$: $f(x)$ v $(-1,0]$ konkávní

$x\in(0,1)$ $f''(x)>0$ $f(x)$ $[0,1)$ konvexní

$x=0$: inflexní bod: