A1. [6b] Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin(k\pi/4) \cdot \frac{1+2k}{2+k} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{k^2+1}}$$

A2. [4b] Vyšetřete, pro které hodnoty $p > 0$ konverguje řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{p(p+1)(p+2)\ldots(p+k)} \cdot \frac{1}{k^p}$$

B1. [6b] Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln(k^k)} \cdot (k+1/k)^{\frac{1}{k}}$$

B2. [4b] Vyšetřete, pro které hodnoty $q > 0$ konverguje řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{k}\, 3^k\, k!}{(3+q)(6+q)(9+q)\ldots(3k+q)}$$

A1. [6b] Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin(k\pi/4) \cdot \frac{1+2k}{2+k} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{k^2+1}}$$

A2. [4b] Vyšetřete, pro které hodnoty $p > 0$ konverguje řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{p(p+1)(p+2)\ldots(p+k)} \cdot \frac{1}{k^p}$$

B1. [6b] Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln(k^k)} \cdot (k+1/k)^{\frac{1}{k}}$$

B2. [4b] Vyšetřete, pro které hodnoty $q > 0$ konverguje řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{k}\, 3^k\, k!}{(3+q)(6+q)(9+q)\ldots(3k+q)}$$

(1A) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^p\, p(p+1)\cdots(p+k)}$$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k+1}{p+k+1}\left(\frac{k}{k+1}\right)^p =$$

$$= \frac{1+\frac{1}{k}}{1+\frac{p+1}{k}} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{k}}\right)^p \to \frac{1+0}{1+0}\cdot\left(\frac{1}{1+0}\right)^p$$

$$= 1\ ;\ \text{VoAL}$$

podílové: neřekne nic. Raabe?

$$k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) = k\left(\frac{1+\frac{p+1}{k}}{1+\frac{1}{k}}\cdot\left(1+\frac{1}{k}\right)^p - 1\right) = f\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1+(p+1)x}{1+x}\cdot(1+x)^p - 1\right) = \frac{(1+(p+1)x)(1+x)^{p-1} - 1}{x}$$

stačí spočíst $\lim\limits_{x\to 0(+)} f(x)$; Heine: $\frac{1}{k}\to 0$, $>0;\ \forall k$

l'Hosp. $\frac{0}{0}$: $(p+1)(1+x)^{p-1} + (1+(p+1)x)(p-1)(1+x)^{p-2}$

$$\to (p+1) + p - 1 = 2p.$$

závěr: $2p>1$: $p>\frac{1}{2}$ $\quad \sum a_k$ konv.

$2p<1$ $\quad p<\frac{1}{2}$ $\quad \sum a_k$ div.

$$|a_{4\ell+2}| = \frac{1+2(4\ell+2)}{2+4\ell+2} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(4\ell+2)^2+1}},$$

tušíme: $|a_{4\ell+2}| \sim \frac{1}{\ell^{2/3}}$ (stačí; neboť $\sum_\ell \frac{1}{\ell^{2/3}}$ diverguje)

ověření $\boxed{\sim}$:

$$\frac{a_{4\ell+2}}{1/\ell^{2/3}} = \frac{8\ell+5}{4\ell+4} \cdot \frac{\sqrt[3]{\ell^2}}{\sqrt[3]{4(2\ell+1)^2+1}}$$

$$= \frac{8+\frac{5}{\ell}}{4+\frac{4}{\ell}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{4\left(2+\frac{1}{\ell}\right)^2+1}} \to \frac{8}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{17}}$$

$\in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Závěr: řada (2A) konv. neabs.

$\boxed{2A}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{4}\right) \cdot \frac{1+2k}{2+k} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{k^2+1}}$

$\sum \sin\left(\frac{k\pi}{4}\right)$ ... omezené část. součty

$\frac{1}{\sqrt[3]{k^2+1}} \to 0$; klesá (jmenovatel roste, >0)

$\Rightarrow \sum \sin\left(\frac{k\pi}{4}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{k^2+1}}$ konverguje (Dirichlet)

$b_k = \frac{1+2k}{2+k} = \frac{2+\frac{1}{k}}{1+\frac{2}{k}} \to 2$;

tedy $\{b_k\}$ omezená.

monotonie ?! $b_k = f(k)$; $f(x) = \frac{1+2x}{2+x}$

$f'(x) = \frac{3}{(2+x)^2} > 0$; $x > 0$:

$\Rightarrow f(x)$ roste na $[0, +\infty)$; tj. $\{b_k\}$ roste.

Závěr: původní řada konv. (Abel & předch.)

? abs. konv.: dokážeme, že $\sum |a_k| = +\infty$

$\sin\frac{k\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -1, \ldots$

tj. $k = 4l+2 \Rightarrow \left|\sin\frac{k\pi}{4}\right| = 1$;

protože $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \geq \sum_{l=0}^{\infty} |a_{4l+2}|$; stačí ukázat divergenci druhé řady

(1B) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{k}\cdot 3^{k}\cdot k!}{(3+q)\cdot(6+q)\cdots(3k+q)}\,.$$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{3(k+1)}{3(k+1)+q}\cdot\left(\frac{k+1}{k}\right)^{1/3} = \frac{1+\frac{1}{k}}{1+\frac{3+q}{3k}}\cdot\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\longrightarrow \bigcirc$$

podílové krit. neříká nic. Raabe ‼

$$k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}-1\right) = k\left(\frac{1+\left(\frac{1}{k}+\frac{q}{3k}\right)}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{4/3}} - 1\right)$$

$$= f\left(\frac{1}{k}\right);\quad f(x) = \frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1+x\left(1+\frac{q}{3}\right)}{(1+x)^{4/3}} - 1\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{(1+x)^{4/3}}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{1+x\left(1+\frac{q}{3}\right)-(1+x)^{4/3}}{x}}_{\text{l'Hosp. „}\frac{0}{0}\text{"}}$$

čitatel: $\;\to 1+\frac{q}{3} - \frac{4}{3}(1+x)^{1/3}$

$$\to 1+\frac{q}{3}-\frac{4}{3} = \frac{1}{3}(q-1)$$

Tedy: $\frac{1}{3}(q-1) > 1$: $q > 4$ -- konv

< 1 $\quad q < 4$ -- div.

(2B) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^k}{\ln k^k}}_{b_k} \cdot \underbrace{\left(k+\frac{1}{k}\right)^{1/k}}_{c_k} = \sum_k a_k$

$$\frac{1}{\ln k^k} = \frac{1}{k \ln k} \to 0; \text{ zjevně klesá.}$$

$\Rightarrow \sum b_k$ konv. (Leibniz)

$\{c_k\}$ .. $c_k = \exp\left(\frac{1}{k} \ln\left(k+\frac{1}{k}\right)\right) = \exp(d_k)$

$d_k = f(k)$; $f(x) = \dfrac{\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x}$, $x>0$.

$f(x) \to 0$; $x \to +\infty$: l'Hosp. $\dfrac{\dots}{+\infty}$

$$\frac{\frac{1}{x+\frac{1}{x}}\cdot\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{1} = \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x+\frac{1}{x}} \to \frac{1+0}{+\infty+0} = 0$$

VoAL.

$$f'(x) = \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{>0}\left(\underbrace{\frac{x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x+\frac{1}{x}}}_{\to 1} - \underbrace{\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)}_{\to +\infty}\right);$$

tedy $f'<0$ pro $x>K$ (velké)

$\Rightarrow$ c_k omezená! $\left(c_k \to e^0 = 1\right)$

monotonní (d_k klesá pro $k>K$; e^y rostoucí fce) tedy $\sum a_k = \sum b_k \cdot c_k$ konv. (Abelovo krit.)

? abs. konv.; tj. zda $\sum |a_k|$ konv.

$$|a_k| = \frac{1}{k \ln k} \cdot c_k \sim \frac{1}{k \cdot \ln k} \text{ ; neboť } c_k \to 1.$$

konv. $\sum \frac{1}{k \cdot \ln k} = \sum f(k)$; $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$.

integrální kritérium: $\sum f(k)$ konv. $\iff \int_2^{\infty} f(x)\,dx < +\infty$

($f > 0$, nerostoucí, spojitá)

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln x} \left| \begin{array}{l} y = \ln x \\ dy = \frac{dx}{x} \\ y \in (\ln 2, +\infty) \end{array} \right| = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dy}{y} = +\infty$$

<u>Závěr:</u> $\sum a_k$ konv. neabs.