C1/ $|a_k| \le \frac{1}{2^k}$; $\Rightarrow \sum a_k$ konv. abs.

díky odhadu $|\sin y| \le 1$; $\forall y \in \mathbb{R}$

C2/ $a_k = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \frac{1}{\sqrt[3]{k}}$; $|a_k| = \frac{1}{k^{1/3}} \Rightarrow \sum |a_k| = +\infty$

Dirichl. krit.: $\frac{1}{\sqrt[3]{k}} \to 0$; klesá ($\sqrt[3]{k}$ roste, kladná)

$(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}$: $-1, -1, 1, 1, \dots$ (perioda $k=4$)

$\sum (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}$: omezené částečné součty! : $\sum a_k$ konv. neabs.

C3/ odhad: $|\sin y| \le |y|$; $\forall y \in \mathbb{R}$

$|a_k| \le |x| \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k$; $\sum \left(\frac{2}{3}\right)^k$ konv. $\Rightarrow \sum |a_k|$ konv;

tedy: $\sum a_k$ konv. abs.

C4/ $a_k = (-1)^k \cdot \frac{2}{k} + \frac{(-1)^{2k}}{k} = b_k + c_k$,

$\sum b_k$ konv. (Leibniz)

$\sum c_k = \sum \frac{1}{k}$ div $\qquad \Rightarrow \sum a_k$ div.

?? $\sum a_k$ konv. : $c_k = a_k - b_k$, tedy $\sum c_k$ konv., SPOR (aritmetika řad)

C5/ $|a_k| = \exp b_k$; $b_k = k^2 \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) - k$;

$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)$, $k \to \infty$

$b_k = -\frac{1}{2} + o(1) \to -\frac{1}{2}$; tedy $|a_k| \to e^{-\frac{1}{2}} \ne 0$

$\sum a_k$ div.

C6) užijeme vzorec $\sin(y \pm k\pi) = (-1)^k \sin y$

$a_k = (-1)^k \sin b_k$; $b_k = \pi\left(\sqrt{n^2+k^2} - k\right)$; n .. pevné

$$b_k = \frac{\pi n^2}{\sqrt{n^2+k^2}+k} \; ; \quad b_k \to 0; \text{ klesá.}$$

pro $k \geq n_0$: $b_k \in (0, \frac{\pi}{2})$; $\sin y$ roste na $(0, \frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow$ $\sin b_k \to 0$; klesá : $\Rightarrow \sum a_k$ konv.
(Leibniz)

$\sum |a_k| = +\infty$; neboť $|a_k| \sim b_k \sim \frac{1}{k}$.

tedy $\sum a_k$ konv. neabs.

C7) $a_k = (-1)^k \dfrac{\sqrt[k]{k}}{\ln \ln \ln k}$; $k \geq 10$: $\ln k \geq 2 > 1$
$\ln(\ln k) > 0$.

---

zřejmě $\dfrac{1}{\ln \ln \ln k} \to 0$; klesá. $\Rightarrow \sum (-1)^k \dfrac{1}{\ln \ln \ln k}$
konv. (Leibniz)

Abel: $\{\sqrt[k]{k}\}$ omezená, monotónní ($\Rightarrow \sum a_k$ konv.
dle Abela)

$\sqrt[k]{k} = \frac{1}{k} \ln k \to 0$: omezená (konečná limita).

$\sqrt[k]{k} = f(k)$; $f(x) = \frac{1}{x} \ln x$;

$f'(x) = \frac{1}{x^2}(1 - \ln x) < 0$; $x \geq 3$

$f(x)$ klesá na $[3, +\infty)$ $\Rightarrow$ $\sqrt[k]{k}$ klesá pro $k \geq 3$.

C8) $a_k = \frac{\ln^{100} k}{k} \cdot \sin \frac{k\pi}{4}$; $\sum \sin \frac{k\pi}{4}$ ... omez. čá'st. součty

$b_k = \frac{\ln^{100} k}{k} \to 0$; ? monotonie : $b_k = f(k)$,

$f(x) = \frac{1}{x} \ln^{100} x$; $f'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \left[100 \ln^{99} x - \ln^{100} x \right]$

$= \frac{1}{x^2} \cdot \ln^{99} x \cdot (100 - \ln x) < 0$ pro $x > e^{100}$.

tedy $\{b_k\}$ klesá pro $k > e^{100} \doteq 3 \cdot 10^{43}$.

C9) $a_k = \frac{1}{\ln k} \cdot \sin\left(k + \frac{1}{k}\right) = \frac{\sin k \cdot \cos \frac{1}{k}}{\ln k} + \frac{\cos k \sin \frac{1}{k}}{\ln k}$

$= b_k + c_k$; ukážeme: $\sum b_k$, $\sum c_k$ konv ;

tedy $\sum a_k$ konv. (aritm. řad.)

---

b_k : $\sum \frac{\sin k}{\ln k}$ konv. (Dirichlet)

$\{\cos \frac{1}{k}\}$ omezená (± 1) ; monotónní : $\frac{1}{k}$ klesá

$\frac{1}{k} \in (0,1)$; $\cos x$ klesá v $(0,1)$

$\sum c_k$: analogicky.

Pozn.: lze ukázat, že $\sum |a_k| = +\infty$;

tj. $\sum a_k$ konv. neabs.

C10) $a_k = (-1)^k \dfrac{\sin^2 k}{k}$; vzorce $\sin^2 y = \frac{1}{2}(1-\cos 2y)$

$\cos(y+k\pi) = (-1)^k \cos y$

$$a_k = (-1)^k \cdot \frac{1}{2k} - \frac{\cos k(2+\pi)}{2k} = b_k - c_k \, ;$$

$\sum b_k$ konv. (Leibniz)

$\sum c_k$ konv. (Dirichl.)

$\Rightarrow \sum a_k$ konv. (aritm. řad)

(pozn.: opět neabsolutně)

C11) $a_k = \dfrac{1}{\ln^2 k} \cos\left(\dfrac{\pi k^2}{k+1}\right)$; $\dfrac{k^2}{k+1}$ „je skoro" k ;

$$a_k = \frac{(-1)^k}{\ln^2 k} \cos\Big(\underbrace{\frac{\pi k^2}{k+1} - \pi k}_{b_k}\Big) \; ; \quad b_k = \frac{-\pi k}{k+1} = \frac{-\pi}{1+\frac{1}{k}} \to -\pi$$

monotónní.

$\sum (-1)^k \dfrac{1}{\ln^2 k}$ konv. (Leibniz)

$\{\cos b_k\}$ omezené, monotónní

$\Rightarrow \sum a_k$ konv. (Abel.)

$b_k \in (-\pi, 0)$, kde $\cos y$ roste.

$$|a_k| = \frac{1}{\ln^2 k} = \underbrace{\frac{k}{\ln^2 k}} \cdot \frac{1}{k} > \frac{1}{k} \; ; \quad \Rightarrow \sum |a_k| \text{ div.}$$

$\to +\infty$; $k \to +\infty$

tedy > 1 pro $k \geq n_0$

C12) $|a_k| = \dfrac{k-1}{k+1} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[100]{k}} \sim \dfrac{1}{k^{\frac{1}{100}}}$; $\frac{1}{100} < 1 \Rightarrow \sum |a_k|$ div

$\sum (-1)^k \dfrac{1}{\sqrt[100]{k}}$ konv. (Leibniz)

$c_k = \dfrac{k-1}{k+1} = 1 - \dfrac{2}{k+1} \to 1$; omezené, roste

$\sum a_k$ konv. (Abel.)

C13) $|a_k| = \frac{1}{k^p}$.

(i) $p \le 0$: $|a_k| \not\to 0$; $\sum a_k$ div.

(ii) $p > 1$: $\sum |a_k|$ konv; tj. $\sum a_k$ konv. abs.

(iii) $p \in (0,1]$: $\frac{1}{k^p} \to 0$; klesá $\Rightarrow$ $\sum a_k$ konv. (neabs.)

C14) $a_k = \frac{\sin kx}{k^p}$; máme: $|\sin y| \le 1$; $y \in \mathbb{R}$

$\sum \sin kx$ ... omez. část. součty $\forall x \in \mathbb{R}$.

(i) $p > 1$: $|a_k| \le \frac{1}{k^p}$; tedy $\sum a_k$ konv. abs. pro $p > 1$

(ii) $p \in (0,1]$: $\sum a_k$ konv. (Dirichlet)

Pozn.: $p \le 0$: $|a_k| \not\to 0$ lze dokázat, docela pracné.

$p \in (0,1]$: $\sum |a_k| = +\infty$

C15) $a_k = (-1)^k \frac{1}{k^{p+\frac{1}{k}}} = \frac{(-1)^k}{k^p} \cdot \frac{1}{\sqrt[k]{k}}$.

protože $\sqrt[k]{k} \to 1$; monotónní $(k \ge 3)$; viz C7,

je situace přesně stejná jako v C13.

C16) $a_k = \frac{\sin \frac{k\pi}{4}}{\sin \frac{k\pi}{4} + k^p}$;

hrubý odhad: $\left|\sin \frac{k\pi}{4} + k^p\right| \ge |k^p| - \left|\sin \frac{k\pi}{4}\right| \ge k^p - 1$

$|a_k| \le \frac{1}{k^p - 1} \sim \frac{1}{k^p}$; $\Rightarrow$ $\sum a_k$ konv. abs. pro $p > 1$.

C16) zobecnění: $b_k := \dfrac{\sin\frac{k\pi}{4}}{k^p}$ ... konv $\forall p>0$ (Dirichlet)

$$a_k - b_k =: c_k = \frac{\sin\frac{k\pi}{4}}{\left(\sin\frac{k\pi}{4}+k^p\right)\cdot k^p};$$

$$|c_k| \le \frac{1}{(k^p-1)\cdot k^p} \sim \frac{1}{k^{2p}};$$ $\sum c_k$ konv. abs. pro $p>\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sum a_k$ konv. pro $p>\frac{1}{2}$.

C17) $$a_k = (-1)^k\cdot\left(\frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdots 2k}\right)^p;$$

$p\le 0$: $|a_k|\ge 1$, neboť $b_k = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k-1}{2k} < 1$.

dokážeme: $p>2$: $\sum |a_k|$ konv

$p<2$: div ; viz A10)

$p>0$: ukážeme, že $b_k\to 0$ (zjevně klesá); $\Rightarrow \sum a_k$ konv. (Leibniz)...

$$\ln b_k = \sum_{l=1}^{k} \underbrace{\ln\left(\frac{2l-1}{2l}\right)}_{-c_l}; \quad c_l = -\ln\left(1-\frac{1}{2l}\right)\sim\frac{1}{l}$$

$\sum_l \frac{1}{l}$ div, tedy $\sum_{l=1}^{k} -c_l \to -\infty \Rightarrow \ln b_k \to -\infty$

tj. $b_k\to 0$.