1. TERMÍN - 2.6.2009

Používáte-li nějakou složitější větu (l'Hospitalovo pravidlo, věta o limitě složené funkce), není třeba formulovat znění, stručně však ověřte její předpoklady.

Definitivní výsledek a důležité mezivýsledky u každého příkladu zvýrazněte!

Vhodné komentáře vám mohou zachránit body i v případě, že ve výpočtu máte numerické chyby nebo nestíháte.

---

1. [8b] Je dána mocninná řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^k}{3^k \exp(k^{1/3})}.$$

(a) najděte poloměr konvergence R
(b) vyšetřete absolutní/neabsolutní konvergenci řady pro hodnotu $x = -R$

---

2. [8b] Nalezněte obecné řešení rovnice

$$2x^2y'' + xy' - y = -\frac{6}{x}.$$

v intervalu $(0, \infty)$.

---

3. [8b] Uvažujte funkci

$$f(x,y) = \left\{ \begin{array}{cc} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{array} \right\}$$

(a) ověřte, že funkce je spojitá v počátku
(b) vypočtěte směrovou derivaci $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}}(0,0)$, kde $\mathbf{w} = (u,v)$ je obecný (nenulový) vektor v rovině.
(c) rozhodněte, zda existuje v bodě $(x,y) = (0,0)$ totální diferenciál.

---

4. [8b] Jsou dány rovnice

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + t^2 - 2 &= 0 \\ x + y + t &= 0 \end{aligned}$$

(a) ověřte podrobně na základě VIF[1], že v okolí bodu $(x,y,t) = (1,0,-1)$ určují tyto rovnice dvojici nekonečně hladkých funkcí $X = X(t)$, $Y = Y(t)$.
(b) spočítejte $X'(-1)$, $Y'(-1)$.
(c) spočítejte $X''(-1)$.

[1] Věta o implicitní funkci.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{k}{3^k \exp(k^{1/3})}}_{c_k} \cdot x^k$

(a) $\sqrt[k]{|c_k|} = \frac{1}{3} \sqrt[k]{k} \cdot \exp\big(\underbrace{k^{-2/3}}_{\to 0}\big) \to \frac{1}{3};$ [1]

$\sqrt[k]{k} = \exp\big(\underbrace{\tfrac{1}{k}\ln k}_{\to 0}\big) \to 1$ $\boxed{R = 3}$ [2]

logaritmus
je slabší

(b) $x = -3: \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^k k \exp(-k^{1/3})}_{a_k}$

? abs. konv.:
– podílové krit.: $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \underbrace{\frac{k+1}{k}}_{\to 1} \cdot \exp\big(\underbrace{-(k+1)^{1/3} + k^{1/3}}_{-b_k}\big)$

$b_k = (k+1)^{1/3} - k^{1/3} \to 0;$

např.: $b_k = k^{1/3}\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^{1/3} - 1\right)$ | subst: $\frac{1}{k} = x$, $x \to 0+$

$= \frac{(1+x)^{1/3} - 1}{x^{1/3}}$; l'Hosp. „$\frac{0}{0}$"

$\dots \frac{\frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}}{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}} = \frac{x^{2/3}}{(1+x)^{2/3}} \to \frac{0}{1} = 0.$

→ podílové krit. nedává nic. (~~Bonus~~ [1])

Raabe: $k\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|-1\right) = k\left(\frac{k}{k+1}\cdot \exp(b_k)-1\right)$ [1]

subst.: $k=\frac{1}{x}$ $\quad\cdots\quad \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+x}\exp\varphi(x) - \frac{x+1}{x+1}\right)$

$x\to 0+$

$$= \frac{1}{x+1}\cdot\Big[\underbrace{\frac{1}{x}\left(\exp\varphi(x)-1\right)}_{A(x)}-1\Big]$$

$$\varphi(x) = \frac{(1+x)^{1/3}-1}{x^{1/3}} \to 0;$$

$\varphi(x)\neq 0$ na okolí 0

$\underbrace{\frac{\exp\varphi(x)-1}{\varphi(x)}}_{\to 1}\cdot\frac{\varphi(x)}{x}$; $\quad \frac{\varphi(x)}{x} = \frac{(1+x)^{1/3}-1}{x^{4/3}}$

l'Hosp. „$\frac{0}{0}$": $\quad \frac{\frac{1}{3}(1+x)^{-2/3}}{4/3\, x^{1/3}} \to +\infty$

→ 0; sledně [3]

závěr: $\sum|a_k|$ konv.

---

konverguje absolutně. [1]

Pokud ukázali pouze abs. neabs. konvergenci → 2b z 5 bodů.

(2) $2x^2y'' + xy' - y = -\frac{6}{x}$ v $(0, +\infty)$

Eulerova: $y(x) = z(\ln x)$

$y'(x) = z'(\ln x)\cdot\frac{1}{x}$

$y''(x) = z''(\ln x)\cdot\frac{1}{x^2} - z'(\ln x)\cdot\frac{1}{x^2}$ [1]

$2z''(\ln x) - z'(\ln x) - z(\ln x) = -6\exp(-\ln x)$

$2z'' - z' - z = -6e^{-t}$; $\underline{z = z(t)}$, $t \in \mathbb{R}$ [2]

---

char. polynom: $2\lambda^2 - \lambda - 1 = (2\lambda+1)(\lambda-1)$

$\lambda = -\frac{1}{2}, 1$

F.S.: $\{e^{-\frac{t}{2}}, e^{t}\}$. [2]

---

partikulární řešení: spec. p.s.: $z_p = Ae^{-t}$

$\lambda = -1$ <u>není kořen</u>.

dosazení: $2Ae^{-t} + Ae^{-t} - Ae^{-t} = -6e^{-t}$

$2A = -6$

$A = -3$ [2]

$z_p = -3e^{-t}$

$z_{obec} = C_1 e^{-\frac{t}{2}} + C_2 e^{t} - 3e^{-t}$

$\boxed{y_0 = C_1 x^{-\frac{1}{2}} + C_2 x - \frac{3}{x}}$; [1]

③ (a) spojitost $\iff \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0.$ [1]

polární souř.: $x_n = r_n \cos\varphi_n \qquad r_n > 0\ ;\ \to 0$

(& Heine) $y_n = r_n \sin\varphi_n \qquad \{\varphi_n\}$ libovolné.

$$f(x_n, y_n) = \frac{r_n^3 \cos^2\varphi_n \sin\varphi_n}{r_n^2\cos^2\varphi_n + r_n^2 \sin^2\varphi_n} = \underbrace{r_n}_{\to 0} \underbrace{\cos^2\varphi_n \sin\varphi_n}_{\text{omezený}} \to 0.$$

[2]

(b) $$\frac{\partial f}{\partial w}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[f(tw) - f(\underset{\sim}{0})\right]$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[f(tu, tv) - f(0,0)\right]$$

$$\frac{1}{t}\,\frac{t^3u^2v}{t^2u^2+t^2v^2} = \frac{u^2v}{u^2+v^2} \longrightarrow \frac{u^2v}{u^2+v^2}\ ;\ t\to 0$$

spec. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

[2]

---

kandidát: $L : \underset{\sim}{h} \longmapsto 0$ (nulové zobrazení) [1]

na t.d.

---

ověřit, že $$\lim_{\underset{\sim}{h}\to \underset{\sim}{0}} \frac{1}{\|\underset{\sim}{h}\|}\left[f(\underset{\sim}{h}) - f(\underset{\sim}{0}) - L\underset{\sim}{h}\right] = 0$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\left[f(h_1,h_2)\right] = 0.$$

$$\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\,\frac{h_1^2 h_2}{h_1^2+h_2^2}=\frac{h_1^2 h_2}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}}\not\to 0$$

-- stačí volit: $h_1 = h_2 = \frac{1}{n}$

$$\frac{\frac{1}{n^3}}{\left(2\cdot\frac{1}{n^2}\right)^{3/2}}=\frac{1}{2^{3/2}}\not\to 0.$$

$\to$ $df(0,0)$ NEEXISTUJE

[2]

(4) $F_1 = x^2+y^2+t^2-2$

$F_2 = x+y+t$

---

předpoklady VIF :

$F_1(1,0,-1) = 1+0+1-2 = 0$

$F_2(1,0,-1) = 1+0-1 = 0$

$F_1, F_2 \in C^\infty$ (polynomy) [1]

---

klíčový předpoklad:

$$\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 2x, & 2y \\ 1, & 1 \end{pmatrix} \quad \dots \text{ v bodě } (1,0,-1)$$

$$\to \begin{pmatrix} 2, & 0 \\ 1, & 1 \end{pmatrix}$$

regulární. [2]

řešení: $X^2(t)+Y^2(t)+t^2-2=0 \qquad t \in \mathcal{U}(-1,\delta)$

$X(t)+Y(t)+t = 0$

$\frac{d}{dt}$: $2XX'+2YY'+2t=0$

$X'+Y'+1=0$

$t=-1$

$X(-1)=1$

$Y(-1)=0$

$2X'(-1)-2=0$

$X'(-1)+Y'(-1)+1=0$

$\Rightarrow X'(-1)=1$

$Y'(-1)=-2$ [2]

$x'' = ?$ $\quad 2xx' + 2yy' + 2t = 0$

$\frac{d}{dt} \Big| \quad xx' + yy' + t = 0$

$$(x')^2 + xx'' + (y')^2 + yy'' + 1 = 0$$

$t = -1$: $\quad 1 + x''(-1) + 4 + 0 + 1 = 0$

$$x''(-1) = -6$$