2. TERMÍN – 5.6.2012

Používáte-li nějakou složitější větu (l'Hospitalovo pravidlo, věta o limitě složené funkce), není třeba formulovat znění, stručně však ověřte její předpoklady.

Postup výpočtu se snažte srozumitelně komentovat a všechna tvrzení co nejpodrobněji odůvodňovat.

Definitivní výsledek a důležité mezivýsledky u každého příkladu zvýrazněte!

---

1. [**8b**] Je dána řada komplexních čísel

$$\sum_{k=1}^{\infty} i^k \Big(\frac{\sqrt[k]{k}}{\sqrt[k^2]{k}} - 1 \Big)$$

kde $i^2 = -1$ je imaginární jednotka.
Rozhodněte, zda řada konverguje a zda absolutně konverguje.

---

2. [**9b**] Nalezněte obecné řešení rovnice

$$y' = 2\sqrt{|y|}\exp x$$

(a) Vhodným napojováním sestrojte maximální řešení
(b) Pokuste se odůvodnit, proč jsou vámi nalezená řešení *všechna* řešení dané rovnice
(c) Napište všechna řešení, splňující $y(0) = 0$.

---

3. [**7b**] Uvažujte funkci

$$f(x,y) = \sqrt[3]{x^2y - y^2x}$$

(a) Ukažte, že funkce je spojitá všude v $\mathbb{R}^2$
(b) V počátku vypočítejte derivaci ve směru obecného (nenulového) vektoru $w = (a,b)$.
(c) Má f v počátku totální diferenciál? Pokud ano, jak přesně vypadá?

---

4. [**8b**] Uvažujte funkci $f = x^2 + y^2 + z^2 - 3yz$ na množině

$$M = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\big\}.$$

(a) identifikujte ,,body podezřelé extrému" ve vnitřku M
(b) identifikujte ,,body podezřelé extrému" na hranici M
(c) vyšetřete, zda nalezené body jsou (či naopak nejsou) globální (či lokální) extrémy

```
1.příklad                               8b
---------

abs.diverguje                           4
        z toho
        řádové rovnosti         2+1
        případ ln(k)/k          1


konverguje                              4
        z toho
        omez. část. součty      1.5
        monotonie               2.5


============================================================

2.příklad                               9b
---------

        nulové řešení   1
        y<0, intervaly  4
        napojování      1.5
        všechna         1
        y(0)=0          1.5


============================================================

3.příklad                       7b
---------

spojitost               2
směrová derivace        2
neexistence t.d.        3

============================================================
4.příklad                       8b
---------

extrémy uvnitř.                 2.5
  z toho poč. je jediný: 1b
  není lok. extrém       1b

hranice                         3.5
  z toho x=1,-1 ...1b
         x=0    ...2b

existence glob. extr.           2


############################################################

        num. chyba, která nezlehčí příklad: -1 (max -2 celkem)
        num. chyba, která příklad zlehčí: až -50%
```

① $\sum a_k$; $\quad a_k = (i)^k \cdot \left(\dfrac{\sqrt[k]{k}}{\sqrt[k^2]{k}} - 1 \right).$

(i) absolutní konvergence

$|a_k| = \exp(b_k) - 1$; $\quad b_k = \ln\left(k^{\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}} \right)$

$$= \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} \right) \cdot \ln k$$

$$= \frac{k-1}{k^2} \cdot \ln k.$$

$b_k > 0$; $b_k \to 0$ $\left(\text{základní limita } \dfrac{\ln k}{k} \to 0,\ k \to \infty \right)$

$\exp(b_k) - 1 \approx b_k$ $\left(\text{zákl. lim. } \dfrac{e^x - 1}{x} \to 1,\ x \to 0 \right)$

$b_k = \dfrac{k-1}{k^2} \ln k \sim \dfrac{1}{k} \ln k \geq \dfrac{1}{k}$

$\sum \frac{1}{k}$ div $\Rightarrow \sum b_k$, a tedy $\sum |a_k|$ div.

(ii) konvergence:

$\sum i^k$ ... omez. část. součty;

neboť $\left| \sum_{k=0}^{n} i^k \right| = \left| \dfrac{i^{n+1} - 1}{i - 1} \right| \leq \dfrac{2}{|i-1|}$; $\forall n$

stačí ukázat: $\exp(b_k) - 1 \to 0$, monotónně.
(Dirichlet) (pro $k \geq n_0$)

$\exp(b_k) \to 1$ již víme ($b_k \to 0$, viz výše).

ověření monotonie:

$\lg(y)$ je rostoucí, tedy stačí monotonie $\{b_k\}$.

$b_k = f(k)$; $f(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) \ln x$;

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) \ln x + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x^3}\Big((2-x)\ln x + x - 1\Big)$$

$$= \frac{1}{x^4}\Big(\underbrace{\left(\frac{2}{x}-1\right)\ln x + 1 - \frac{1}{x}}_{\to -\infty \text{ dle VoAL}}\Big);$$

tj.: $f'(x) < 0$ pro $x > x_0$

$b_k = f(k)$ klesá pro $k > x_0$.

(2) $y' = 2\sqrt{|y|} \cdot e^x$;

(i) $y = 0$; $x \in \mathbb{R}$ -- (maximální) řešení

(ii) $y > 0$; $x \in \mathbb{R}$: $|y| = y$

$$\frac{y'}{2\sqrt{y}} = e^x$$

$\sqrt{y} = e^x + c$ -- diskuse: $c \in \mathbb{R}$ dáno;

$I_c = ?$ t.ž. $e^x + c > 0$, $x \in I_c$

1. $c \geq 0$: $I_c = \mathbb{R}$; $y = (e^x + c)^2 > 0$ je maximální.

2. $c < 0$: $e^x > -c$ (>0)

$x > \ln(-c)$; $I_c = (\ln(-c), +\infty)$

$y = (e^x + c)^2$.

lze ale spojit s 0

pro $x \leq \ln(-c)$.

(iii) $y < 0$: $|y| = -y$

$$\frac{y'}{\sqrt{-y}} = e^x$$

$$-(\sqrt{-y})' = e^x$$

$-\sqrt{-y} = e^x + c < 0$. $c \geq 0$: $I_c = \emptyset$

$c < 0$: $e^x < -c$

$x < \ln(-c)$;

$I_c = (-\infty, \ln(-c))$

$\sqrt{-y} = -(e^x + c)$

$-y = (e^x + c)^2$

$y = -(e^x + c)^2$

diskuse:

$$y = 0; \quad x \in \mathbb{R}$$
$$y = (e^x + c)^2; \quad c \geq 0; \quad x \in \mathbb{R}$$
} zjevně maximální

$$y = \pm (e^x + c)^2; \quad x \in (\ln(-c), +\infty)$$
$$(-\infty, \ln(-c))$$

.. lze dodefinovat 0 před/za $\ln(-c)$.

zdůvodnění díky spojitosti

$$f(x,y) = 2\sqrt{|y|} \cdot e^x$$

a faktu, že $y \to 0; \ x \to \ln(-c)\pm$.

$y(0) = 0$ zřejmé řešení: $y \equiv 0$.

$$y = \begin{cases} 0, & x \in [\ln(-c_1), \ln(-c_2)] \\ (e^x + c_2)^2; & x > \ln(-c_2) \\ -(e^x + c_1); & x < \ln(-c_1) \end{cases}$$

kde $\ln(-c_1) < 0 < \ln(-c_2)$

tj.: $-c_1 < 1 < -c_2$

pro $y \neq 0$ je $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{\sqrt{|y|}} \operatorname{sgn} y \cdot e^x$

spojité, tedy zde $\nexists$ jiné řešení.

③ $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2y - y^2x}$.

(a) složení spojitých funkcí

$(x,y) \longmapsto x^2y - y^2x$ (polynom) 2

$z \longmapsto \sqrt[3]{z}$ (spojitá v R).

(b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t \to 0} \varphi(t)$, $\varphi(t) = \frac{1}{t}\left(f(t,0) - f(0,0)\right)$

$\varphi(t) = \frac{1}{t}\sqrt[3]{t^2 \cdot 0 - 0 \cdot t^2} = \frac{0}{t} = 0$ na $P(0)$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$; podobně $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. 2

$\frac{\partial f}{\partial w}(0,0) = \lim\limits_{t \to 0} \psi(t)$; $\psi(t) = \frac{1}{t}\left(f(ta,tb) - f(0,0)\right)$

$\psi(t) = \frac{1}{t}\sqrt[3]{t^3a^2b - ab^2t^3} = \cancel{\frac{1}{t}}\sqrt[3]{\cancel{t^3}(a^2b - ab^2)}$

$= \sqrt[3]{a^2b - ab^2}$.

(c) $df(0,0)$ $\nexists$, neboť $(w) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial w}(0,0)$ není lineární.

$(1,0) \longmapsto 0$

$(0,1) \longmapsto 0$,

$(1,-1) \longmapsto \sqrt[3]{-2} \neq 0$.

3

④ $f = x^2+y^2+z^2-3yz$

$\Gamma = \{x^2+y^2+z^2 \le 1\}$

(a) vnitřek: tj. $x^2+y^2+z^2<1$

$\nabla f \ \exists \quad \phi$

$\nabla f = \underset{\sim}{0}$: $\quad 2x=0 \qquad x=0$

$2y-3z=0$

$2z-3y=0 \qquad \begin{pmatrix} 2, & -3 \\ -3, & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \ y=z=0.$

$A=(0,0,0)$: $\ f=0$

(b) hranice: f na $\Gamma=\{g=0\}$; $\ g=x^2+y^2+z^2-1$

$\nabla f, \nabla g \ \exists \quad \phi$

$\nabla g = \underset{\sim}{0}$: $(2x,2y,2z)=(0,0,0)$ ... nikde na Γ

$\nabla f = \lambda \nabla g$: $\quad 2x = \lambda 2x$

$2y-3z = \lambda 2y$

$2z-3y = \lambda 2z$

1. rce: $\boxed{x \ne 0} \Rightarrow \lambda = 1$. $\qquad$ 2. & 3. rce: $-3z=0$

$-3y=0$

$y=z=0.$

podmínka Γ: $B_{1,2}=(\pm 1,0,0)$

$f=1.$

$\boxed{x=0}$ $\quad$ 2. & 3. rce: nutně $\lambda \ne 0, z \ne 0, y \ne 0$

(jinak $(y,z)=(0,0)$; $(0,0,0) \notin \Gamma$.

vzájem. podělením: $y = \pm z$

rce Γ: $C=\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$f = 1 \pm \frac{3}{2} = \left\langle \begin{matrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{matrix} \right.$

diskuse: M omezené ($|x|, |y|, |z| \leq 1$)

uzavřené: $M = \varphi^{-1}((-\infty, 1])$

$\varphi: (x,y,z) \mapsto x^2+y^2+z^2$

spojité

f spojité.

$\Rightarrow \exists$ glob. extrémy

porovnání hodnot:

$C_1 = \left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $f = -\frac{1}{2}$ glob. MIN.

$C_2 = \left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $f = \frac{5}{2}$ glob. MAX.

Pozn: $A = (0,0,0)$: $\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

$\det = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (4-9) < 0$

tj. $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 < 0$, leč zjevně $\lambda_1 = 2 > 0$

$\Rightarrow$ sedlový bod; $(0,0,0)$ není ani lokální extrém.