2. TERMÍN – 10.6.2009

Používáte-li nějakou složitější větu (l'Hospitalovo pravidlo, věta o limitě složené funkce), není třeba formulovat znění, stručně však ověřte její předpoklady.

Definitivní výsledek a důležité mezivýsledky u každého příkladu zvýrazněte!

Vhodné komentáře vám mohou zachránit body i v případě, že ve výpočtu máte numerické chyby nebo jej nestihnete dokončit.

---

1. [7b] Je dána řada

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln k}{\sqrt{k^2-k}} \cos\left(\frac{3k\pi}{2}\right).$$

(a) ukažte, že řada konverguje

(b) rozhodněte, zda je konvergence absolutní

---

2. [8b] Je dána diferenciální rovnice

$$y' = 20e^{-x}\sqrt[5]{y^4}.$$

(a) najděte všechna kladná řešení

(b) najděte všechna záporná řešení

(c) najděte alespoň tři různá řešení, splňující $y(0) = 0$.

Návod: $\left(\sqrt[5]{y}\right)' = 1/\left(5\sqrt[5]{y^4}\right)$ *pro* $y \neq 0$

---

3. [8b] Je dána funkce

$$f(x,y) = \frac{1-\cos(x^2+2y^4)}{x^2+y^4}, \qquad (x,y) \neq (0,0).$$

(a) dodefinujte f tak, aby byla v bodě $(0,0)$ spojitá

(b) vypočítejte $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

(c) rozhodněte, zda existuje v bodě $(0,0)$ totální diferenciál

Návod: $\lim_{z\to 0}\left(1-\cos z\right)/z^2 = 1/2$

---

4. [9b] Je dána funkce

$$f = 4x^2 - 2y^2 + 2z^2 - 3yz$$

na množině

$$M := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 \leq 1\right\}.$$

(a) zdůvodněte podrobně existenci globálních extrémů

(b) vyšetřete existenci lokálních extrémů *uvnitř* M

(c) určete podezřelé body na hranici M

(d) *[BONUS +1b] dopočtěte, který z podezřelých bodů je extrém*

① $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \underbrace{\frac{\ln k}{\sqrt{k^2-k}}}_{b_k} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{3k}{2}\pi\right)}_{a_k}$

Dirichlet: $\sum a_k$ – omezené částečné součty

přednáška: $\sum \cos(kx)$ $x = \frac{3\pi}{2} \neq 2l\pi$

$b_k \to 0$; monotónní.

důkaz limity: $b_k = \sqrt{c_k}$; $c_k = \dfrac{\ln^2 k}{k^2-k} \to 0$

(ln slabší než polynom.)

důkaz monotonie: $c_k = f(k)$

$$f(x) = \frac{\ln^2 x}{x^2-x};$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x^2-x)^2} \cdot \left[2\ln x \cdot \frac{1}{x}(x^2-x) - \ln^2 x\,(2x-1)\right]$$

$$= \frac{\ln x}{(x^2-x)^2}\left[2(x-1) - \ln x \cdot (2x-1)\right]$$

$$= \underbrace{\frac{(x-1)\cdot \ln x}{(x^2-x)^2}}_{\substack{>0 \\ \text{pro } x>1}} \Big[2 - \underbrace{\ln x \cdot \frac{2x-1}{x-1}}_{\substack{\to +\infty \\ x \to +\infty}}\Big] < 0 \quad \text{pro } x > x_0$$

$\Downarrow$

$\{c_k\}$ klesá pro $k \geq k_0$.

? absolutní konvergence:

→ konverguje neabsolutně:

$$\sum_{k=2}^{\infty} |a_k| \geq \sum_{m=1}^{\infty} |a_{2m}| = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\ln 2m}{\sqrt{4m^2-2m}} \geq \sum \frac{\ln 2}{\sqrt{4m^2}}$$

$$\ln 2m \geq \ln 2 \qquad\qquad = \ln 2 \cdot \sum \frac{1}{m^2} = +\infty.$$

$$4m^2-2m < 4m^2$$

(2) $y' = 20\, e^{-x} \sqrt[5]{y^4}$

(a) $y > 0$: $\dfrac{y'}{5\sqrt[5]{y^4}} = 4e^{-x}$

$$\sqrt[5]{y} = c - 4e^{-x}$$

Diskuse: $\sqrt[5]{y} > 0$: $c - 4e^{-x} > 0$

(i) $c \le 0$ $\emptyset$.

(ii) $c > 0$: $c > 4e^{-x}$

$\ln(c/4) > -x$

$x \in \left(-\ln \frac{c}{4}, +\infty\right)$.

$y(t) = \left(c - 4e^{-x}\right)^5$

(b) $y < 0$: ... $\sqrt[5]{y} = c - 4e^{-x} < 0$

(podobně)

(i) $c \le 0$: $x \in \mathbb{R}$

(ii) $c > 0$: $x \in \left(-\infty, -\ln \frac{c}{4}\right)$

$y(t) = \left(c - 4e^{-x}\right)^5$.

(c) (i) $y = 0$; $x \in \mathbb{R}$

(ii) $y = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ \left(4 - 4e^{-x}\right)^5; & x > 0 \end{cases}$

(iii) $y = \left(4 - 4e^{-x}\right)^5$; $x \in \mathbb{R}$ atd.

③ $$f(x,y)=\frac{1-\cos(x^2+2y^4)}{x^2+y^4}$$

(a) $$\underbrace{\frac{1-\cos(x^2+2y^4)}{(x^2+2y^4)^2}}_{\substack{(i)\\ \to \frac{1}{2}}}\cdot\underbrace{\frac{x^2+2y^4}{x^2+y^4}}_{\substack{(ii)\\ \text{omezené:}}}\underbrace{(x^2+2y^4)}_{\to 0}\longrightarrow 0$$

(i) $$\frac{1-\cos r}{r^2}\to\frac{1}{2}\quad (\text{zákl. lim.})$$

$x^2+2y^4\to 0$

ale $\neq 0$ pro $(x,y)\neq(0,0)$

(ii) $$0<\frac{x^2+2y^4}{x^2+y^4}\le\frac{2x^2+2y^4}{x^2+y^4}\le 2.$$

(b) $$\frac{1}{t}\Big[f(t,0)-\underbrace{f(0,0)}_{=0}\Big]=\frac{1-\cos t^2}{t^3}=\underbrace{\frac{1-\cos t^2}{t^4}}_{\to\frac{1}{2}}\cdot t\to 0$$

$$\frac{1}{t}\Big[f(0,t)-f(0,0)\Big]\longrightarrow 0$$

(podobně.)

(c) Kandidát: $L : (u,v) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)u + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)v = 0$

ověření:

$$\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\left[f(u,v) - f(0,0) - L(u,v)\right] = \frac{1-\cos(u^2+2v^4)}{\sqrt{u^2+v^2}\cdot(u^2+2v^4)}$$

$$= \underbrace{\frac{1-\cos(u^2+2v^4)}{(u^2+2v^4)^2}}_{\to \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\frac{(u^2+2v^4)}{u^2+v^4}}_{\text{omezené}} \cdot \underbrace{\frac{u^2+2v^4}{\sqrt{u^2+v^2}}}_{(iii)\ \to 0} \to 0$$

(iii) $0 \leq \frac{u^2+2v^4}{\sqrt{u^2+v^2}} = \frac{u^2}{\sqrt{u^2+v^2}} + \frac{2v^4}{\sqrt{u^2+v^2}}$;

$$\frac{u^2}{\sqrt{u^2+v^2}} = |u| \cdot \underbrace{\frac{|u|}{\sqrt{u^2+v^2}}}_{\leq 1} \to 0 \;;$$

podobně 2. část.

(4) $f = 4x^2 - 2y^2 + 2z^2 - 3yz$

$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 \leq 1\}.$

(a) f spojitá (polynom)

M omezená $(|x|, |y|, |z| \leq 1)$

uzavřená: $M = \varphi^{-1}((-\infty, 1])$

$(-\infty, 1] \subset \mathbb{R}$ uzavřená

$\varphi(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ spojitá.

$\Downarrow$

M kompaktní

$\Rightarrow \exists$ glob. extrémy

(b) uvnitř: $(x^2+y^2+z^2 < 1)$

$\nabla f = 0$:

$$8x = 0 \to x = 0$$

$$-4y - 3z = 0 \quad | \cdot (-3)$$

$$-3y + 4z = 0 \quad | \cdot 4$$

$$25z = 0 \to z = y = 0.$$

$(0,0,0) \in$ vnitřek M.

$$\nabla^2 f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 8, & 0, & 0 \\ 0, & -4, & -3 \\ 0, & -3, & 4 \end{pmatrix} ; \quad p(\lambda) = (\lambda - 8) \cdot \begin{vmatrix} \lambda+4, & 3 \\ 3, & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-8)(\lambda^2 - 25)$$

vlastní čísla: $\{8, 5, -5\}$

sedlový bod (není extrém)

(c) hranice $\Gamma = \{ \underbrace{x^2+y^2+z^2-1}_{g} = 0 \}$

podezřelé: (i) $\nabla g = \underset{\sim}{0}$

(ii) $\nabla f = \lambda \nabla g$

(i) $\nabla g = 2(x, y, z) \neq \underset{\sim}{0}$ všude na Γ

(ii) $\boxed{8x = \lambda 2x} \Rightarrow$ (α) $x = 0$

(β) $x \neq 0 \rightarrow \lambda = 4$

$-4y - 3z = \lambda 2y$

$-3y + 4z = \lambda 2z$

(α) $\boxed{x = 0}$: 2.&3. rce $\rightarrow$ $y \neq 0$, $z \neq 0$.

$(2.\text{rce})(-z) + (3.\text{rce})(y)$: $3z^2 + 8yz - 3y^2 = 0$

$3K^2 + 8K - 3 = 0$; $\boxed{K = \frac{z}{y}}$.

$(K+3)(3K-1) = 0$

$K = -3$: $z = -3y$: $y^2 + 9y^2 = 1$

$y^2 = \frac{1}{10}$

$y = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}$

$A = \left(0, \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{-3}{\sqrt{10}}\right)$

$B = \left(0, \frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.

$K = \frac{1}{3}$: $z = \frac{1}{3}y \rightarrow z^2 = \frac{1}{10}$

$z = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}$

$C = \left(0, \frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$

$D = \left(0, \frac{-3}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}\right)$.

(β) $x \neq 0$: $\lambda = 4$

2. a 3. ce: $-4y - 3z = 8y$

$-3y + 4z = 8z$

$\to$ nutně $(y,z) = (0,0)$

$g = 0$: $x = \pm 1$ $E = (1,0,0)$

$F = (-1,0,0)$.

—

Bonus: (dosazením): $f(E) = f(F) = 4$ max

$f(C) = f(D) = -2.5$ min

$f(A) = f(B) = 2.5$ (nic)