3. TERMÍN – 12.6.2012

Používáte-li nějakou složitější větu, není třeba formulovat znění, stručně však ověřte její předpoklady. Definitivní výsledek a důležité mezivýsledky u každého příkladu zvýrazněte!

---

1. [**8b**] Je dána mocninná řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^p k! \exp(k)}{(|p|+1)(|p|+2)\dots(|p|+k)} \cdot z^k$$

kde p je reálný parametr.
(i) Určete poloměr konvergence R
(ii) Vyšetřete, pro která $p \in \mathbb{R}$ je konvergence na „kružnici konvergence" (tj. při volbě $|z| = R$) *absolutní*
(iii) Nalezněte příklad p a z takových, že řada konverguje *neabsolutně* (či naopak dokažte, že toto nemůže nastat)

---

2. [**8b**] Uvažujte rovnici

$$y' = 4x \exp(-x)\sqrt{-y} - 2y.$$

Nápověda: $z = \sqrt{-y}$. *Pozor na znaménka!*

(i) Nalezněte obecná řešení rovnice
(ii) Sestrojte maximální řešení – je-li možné řešení napojovat, ověřte podrobně, proč jsou napojené funkce řešením
(iii) Nalezli jste skutečně *všechna* řešení? Pokuste se odůvodnit

---

3. [**8b**] Je dána funkce

$$f(x,y) = \frac{(x-y)^3}{\sin(x^2+xy+y^2)}.$$

(i) Určete $\delta > 0$ takové, že f je definována na prstencovém δ-okolí počátku
(ii) Dodefinujte f v počátku spojitě
(iii) Vypočítejte v počátku parciální derivace
(iv) Určete, zda v počátku existuje totální diferenciál. Jak přesně vypadá?

---

4. [**8b**] Uvažujte funkci $f = x^2 y$ na množině $M \subset \mathbb{R}^2$, kde

$$M = \{x^3 + y^3 \le 1\} \cap \{x \ge 0\} \cap \{y \ge 0\}$$

(i) Vyšetřete (podrobně zdůvodněte), zda existují globální extrémy
(ii) Určete body podezřelé z extrému *uvnitř* M
(iii) Určete podezřelé body *na hranici* M
(iv) Které z nalezených bodů jsou (globální, lokální) extrémy?

3. termín -- 12.6.2012

==

1.příklad 8b

určení R	1
Raabe	3
neabs.konv.	4
(--z toho monot. 2)	

==

2.příklad 8b

nulové řešení	1
y<0	3
napojení	2
jednoznačnost	2

==

3.příklad 8b

delta	1
limita	2
parc.der.	1.5
neex.tot.dif	3.5

==

4.příklad 8b

uzavř a omez.	1
vnitřek	2
rovná hranice	1.5
Lagrange	3.5

(i) $\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left(\dfrac{k+1}{k}\right)^p \cdot \dfrac{(k+1)\, e}{|p|+k+1} \longrightarrow e \Rightarrow R = \dfrac{1}{e}$

(ii) $|a_k r^k| = b_k = \dfrac{k^p \cdot k!}{(|p|+1)\cdots(p+|k|)}$ pro $r = R = \dfrac{1}{e}$

podílové krit.: $\dfrac{b_{k+1}}{b_k} = \left(1+\dfrac{1}{k}\right)^p \cdot \left(\dfrac{1+\frac{1}{k}}{1+\frac{|p|+1}{k}}\right) \to 1$

Raabe: $k\left(\dfrac{b_k}{b_{k+1}} - 1\right) = k\left(\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^{-(p+1)} \cdot \left(1+\dfrac{|p|+1}{k}\right) - 1\right)$

- Taylor: $(1+y)^a = 1 + ay + o(y)$; $y \to 0$

$\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^{-(p+1)} \cdot \left(1+\dfrac{|p|+1}{k}\right) =$

$= \left(1 - \dfrac{p+1}{k} + o\left(\dfrac{1}{k}\right)\right) \cdot \left(1+\dfrac{|p|+1}{k}\right)$

$= 1 + \dfrac{1}{k}\left(|p|-p\right) + o\left(\dfrac{1}{k}\right)$

celkem: Raabe $\longrightarrow |p|-p$.

diskuse: $p \geq 0$: 0 -- diverguje

$p < 0$: $2|p|$ -- konverguje pro $|p| > \frac{1}{2}$

tj. $p < -\frac{1}{2}$.

$p = -\frac{1}{2}$ nevíme

(iii) volme $x = -\frac{1}{e}$; $p \in (-\frac{1}{2}, 0)$ libovolné.

-- jde o řadu $\sum c_k$; $c_k = (-1)^k k^{+p} \cdot \dfrac{k!}{(|p|+1) \cdots (|p|+k)}$.

$\sum |c_k| = +\infty$ dle bodu (ii);

avšak $\sum (-1)^k k^{-p}$ konverguje (Leibniz)

$d_k = \dfrac{k!}{(|p|+1) \cdots (|p|+k)}$ - monotonní, omezené.

$0 < d_k \leq 1$ (jmenovatel $> 1 \cdot 2 \cdots k = k!$)

monotonie: $\dfrac{d_{k+1}}{d_k} = \dfrac{k+1}{|p|+k+1} < 1$;

tj. $d_{k+1} < d_k$ -- klesá!

$\Rightarrow$ $\sum c_k$ konverguje (Abel. krit.)

② $y' = 4x e^{-x}\sqrt{-y} - 2y$

(i) $y=0$; $x\in\mathbb{R}$ -- (stacionární) řešení

(ii) $y<0$: položme $z=\sqrt{-y}$ (>0).

$$z' = \frac{-y'}{2\sqrt{-y}};$$

dělíme rce: $\frac{1}{2\sqrt{-y}}$:

$$\frac{y'}{2\sqrt{-y}} = 2xe^{-x} + \underbrace{\frac{-y}{\sqrt{-y}}}_{\sqrt{-y}}$$

$$-z' = 2xe^{-x} + z$$

$$z'+z = -2xe^{-x} \quad / e^{x}$$

$$(ze^{x})' = -2x$$

$ze^{x} = c - x^2$ -- diskuze: $c\in\mathbb{R}$ dáno;

hledám I_c (interval)

s.ř. $c-x^2>0$; $x\in I_c$

$c\le 0$: $I_c=\emptyset$

$c>0$: $I_c = (-\sqrt{c}, \sqrt{c})$.

$$z = e^{-x}(c-x^2) = \sqrt{-y}$$

$$\boxed{y = -e^{-2x}(c-x^2)^2; \quad x\in I_c}$$

(iii) v polorovině $y<0$ je $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-xe^{-x}}{\sqrt{-y}} - 2$ spojité

$\Rightarrow$ jednoznačnost;

lze napojit 0 za/před $\pm\sqrt{c}$.

zkowike (2)

$$y = -e^{-2x}(c-x^2)^2$$

LS: $y' = 2e^{-2x}(c-x^2)^2 + 4xe^{-2x}(c-x^2)$.

PS: $4x \cdot e^{-x}\sqrt{-y} = 4xe^{-x}\sqrt{\left(e^{-2x}(c-x^2)^2\right)}$

$= 4xe^{-x} \cdot e^{-x}|(c-x^2)|$

$= 4xe^{-2x}(c-x^2)$; jeśli $c-x^2 \geq 0$.

PS: $-2y = 2e^{-2x}(c-x^2)^2$. O.K

③ $f = \dfrac{(x-y)^3}{\sin(x^2+xy+y^2)}$;

(i) polární souřadnice $x = r\cdot\cos\varphi$

$y = r\cdot\sin\varphi$

$x^2+xy+y^2 = r^2(1+\cos\varphi\sin\varphi)$

$= r^2(1+\underbrace{\tfrac{1}{2}\sin 2\varphi}_{\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]})$

sin >0 : vždy

$<\pi$: pro $r^2\cdot(1+\frac{1}{2})<\pi$

$r<\sqrt{\frac{2\pi}{3}}$

(ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ -- opět polární souř. & Heine.

$x = r_n\cos\varphi_n$

$y = r_n\cdot\sin\varphi_n$; $r_n>0, \to 0$

$\{\varphi_n\}$ libovolné.

$f = \dfrac{r_n^3(\cos\varphi_n-\sin\varphi_n)^3}{\sin(r_n^2(1+\frac{1}{2}\sin 2\varphi_n))}$

$= \underbrace{\dfrac{r_n^2(1+\frac{1}{2}\sin 2\varphi_n)}{\sin(\text{---}\,''\,\text{---})}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\dfrac{(\cos\varphi_n-\sin\varphi_n)^3}{(1+\frac{1}{2}\sin 2\varphi_n)}}_{\text{omezené}} \cdot \underbrace{r_n}_{\to 0}$

rozkl. limita čitatel $\leq 2^3$

jm. $\geq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow f(0,0) := 0.$

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \varphi(t)$; $\varphi(t) = \frac{1}{t}\left(f(t,0) - f(0,0)\right)$

$$\varphi(t) = \frac{1}{t} \cdot \frac{t^3}{\sin t^2} = \frac{t^2}{\sin t^2} \to 1\ ; \quad t \to 0$$

analogicky se dostane: $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1$.

(iii) kandidát: $L : (u,v) \longmapsto u - v$.

ověřím $h(u,v) \to 0$ pro $(u,v) \to (0,0)$

$$h(u,v) = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\left(f(u,v) - (u-v) - f(0,0)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\left(\frac{(u-v)^3}{\sin(u^2+uv+v^2)} - u - v\right)$$

$$= \frac{u-v}{\sqrt{u^2+v^2}}\left(\frac{(u-v)^2 - \sin(u^2+uv+v^2)}{\sin(u^2+uv+v^2)}\right)$$

– NEJDE do 0; volme $u = -v = t \to 0+$

$$\frac{2t}{\sqrt{2t^2}} \cdot \left(\frac{(2t)^2 - \sin(3t^2)}{\sin(3t^2)}\right)$$

$$= \sqrt{2} \cdot \left(\frac{4t^2}{\sin(3t^2)} - 1\right) \to \sqrt{2}\left(\frac{4}{3} - 1\right) \neq 0$$

$t \to 0+$.

$\Rightarrow$ $df(0,0)$ $\nexists$

(4) $f = x^2 y$; $M = \{x^3+y^3 \le 1\} \cap \{x \ge 0\} \cap \{y \ge 0\}$.

(i)
$M = \varphi^{-1}\big((-\infty,1]\big) \cap \psi^{-1}\big([0,+\infty)\big) \cap \eta^{-1}\big([0,+\infty)\big)$;

$\varphi : (x,y) \longmapsto x^3+y^3$

$\psi : (x,y) \longmapsto x$ spojité (polynomy)

$\eta : (x,y) \longmapsto y$ – vzory uzavřených (v $\mathbb{R}$) intervalů; $\Rightarrow$ M uzavřené.

M omezené : $x, y \in [0,1]$.

f spojité (polynom)

$\Rightarrow$ $\exists$ globální extrémy

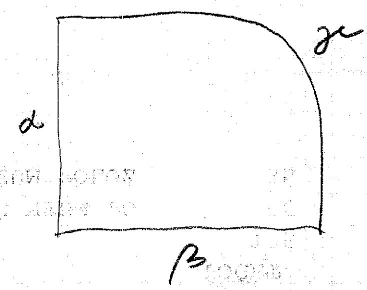
(ii) vnitřek M : $\{x^3+y^3<1\} \cap \{x>0\} \cap \{y>0\}$

podezřelé : $\nabla f \nexists$ $(\emptyset)$

$\nabla f = \underset{\sim}{0}$: $\begin{matrix} 2xy = 0 \\ x^2 = 0 \end{matrix}$ $\Leftrightarrow x = 0$: neleží uvnitř.

celkem: $\emptyset$ uvnitř.

(iii) hranice:



(α) $x=0,\ y \in [0,1]$: $f \equiv 0$

(β) $y=0;\ x \in [0,1]$: $f = 0$

(γ) $x, y > 0$ & $g = 0$; kde $g = x^3+y^3-1$

podezřelé : $\nabla g \nexists$, $\emptyset$

$\nabla g = \underset{\sim}{0}$: $\left.\begin{matrix} 3x^2 = 0 \\ 3y^2 = 0 \end{matrix}\right\}$ $\Rightarrow x = y = 0$

$g \neq 0$, SPOR.

Lagrange $\quad \nabla f = \lambda \nabla g$

$$2xy = \lambda 3x^2 \qquad x, y \neq 0 \text{; zj. seč}$$
$$x^2 = \lambda 3y^2 \qquad \lambda \neq 0$$

dělením: $\dfrac{2xy}{x^2} = \dfrac{3\lambda x^2}{3\lambda y^2}$

$$2y^3 = x^3 \qquad x^3 + \left(\frac{x}{\sqrt[3]{2}}\right)^3 = 1$$
$$y = \frac{x}{\sqrt[3]{2}} \qquad x^3\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 1$$
$$x = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$$

$$B = \left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$$

$$f(B) = \frac{\sqrt[3]{4}}{3} > 0.$$

(iv) B -- globální maximum -- $f = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$

$[t, 0]$, $[0, t]$ -- $0 \le t \le 1$ --

globální minima $f = 0$.