3. TERMÍN - 15.6.2009

Používáte-li nějakou složitější větu (l'Hospitalovo pravidlo, věta o limitě složené funkce), není třeba formulovat znění, stručně však ověřte její předpoklady.
Definitivní výsledek a důležité mezivýsledky u každého příkladu zvýrazněte!
Veškeré úvahy řádně odůvodněte. Odevzdávejte prosím všechny použité výpočty.

---

1. [**7b**] Je dána řada

$$\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\left\{k^{\frac{1}{1+k^3}}-1\right\}.$$

(a) rozhodněte, zda řada konverguje
(b) rozhodněte, zda řada absolutně konverguje

---

2. [**9b**] Nalezněte obecné řešení soustavy

$$x' = -13x - 15y$$
$$y' = 12x + 14y - \cos t + te^{-t}$$

Neznámé funkce jsou $x = x(t)$ a $y = y(t)$.

---

3. [**8b**] Je dána funkce

$$f(x,y) = \frac{1-\sqrt{1+x^2+2y^2}}{ax^2+y^2}, \qquad (x,y) \neq (0,0),$$

kde $a > 0$ je pevná konstanta.
(a) vypočítejte parciální derivace ve všech bodech mimo $(0,0)$
(b) vysvětlete podrobně, co je $df(1,1)$ (totální diferenciál v bodě $(x,y) = (1,1)$) a proč existuje
(c) zvolte $a > 0$ takové, aby existovala

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

(Návod: vypočítejte nejprve limity ve směru os)
(d) pro tuto hodnotu a dodefinujte $f(0,0)$ tak, aby funkce byla v počátku spojitá - ověřte podrobně spojitost nově dodefinované funkce v bodě $(x,y) = (0,0)$

---

4. [**8b**] Je dána funkce

$$f = 1 + xy + yz$$

na množině

$$M := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ xyz = 1, \ x > 0, y > 0, z > 0\right\}.$$

(a) rozhodněte, zda je M omezená a zda je uzavřená
(b) určete body podezřelé z extrémů f vůči M
(c) rozhodněte, zda je funkce omezená (případně shora omezená nebo zdola omezená) na M
(d) rozhodněte, zda některý z bodů nalezených sub b) je globální extrém; jakých hodnot nabývá f na M ?

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left\{ k^{\frac{1}{1+k^3}} - 1 \right\}$

(a) $b_k = \exp\left(\frac{\ln k}{1+k^3}\right) - 1 = \exp(c_k) - 1$

Leibniz: $b_k > 0$ (neboť $c_k > 0$)

monotonie: $e^x - 1$ monotónní (rostoucí)

$c_k = f(k)$; $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^3}$;

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x^3)^2}\left[\frac{1}{x}(1+x^3) - \ln x \cdot 3x^2\right]$$

$$= \frac{1}{(1+x^3)^2}\Big[\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} - \underbrace{x^2}_{\to +\infty}\underbrace{(3\ln x - 1)}_{\to +\infty}\Big]$$

tedy: $[\quad] < 0$ pro x dost velké...

$\{c_k\}$ a tudíž $\{b_k\}$ klesá od jistého indexu...

řada konverguje (Leibniz)

(b) $\sum |a_k| = \sum d_k$;

$$d_k = k^{\frac{1}{1+k^3}} - 1 = \exp\left(\frac{\ln k}{1+k^3}\right) - 1$$

tvrdíme: (i) $d_k \sim \frac{\ln k}{1+k^3} =: e_k$

(ii) $\sum e_k$ konv.

$\Rightarrow$ původní řada konverguje absolutně...

(i) ? $\lim\limits_{k\to\infty} \underbrace{\frac{d_k}{\frac{\ln k}{1+k^3}}}$ $\in \mathbb{R}$.

$= \frac{e^{c_k} - 1}{c_k} \to 1$; neboť $c_k \to 0$, $c_k \neq 0$ $\forall k$

& známá limita...

$$\lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

(ii) $0 < e_k = \frac{\ln k}{1+k^3} < \frac{\ln k}{k^3} = \underbrace{\frac{\ln k}{k}} \cdot \frac{1}{k^2}$; $\sum \frac{1}{k^2}$ konv.

$\to 0$; a tedy

< 1 pro $k > k_0$

$\Rightarrow \sum e_k$ konv. (srovnávací kritérium).

② $x' = -13x - 15y$

$y' = 12x + 14y - \cos t + te^{-t}$

1. rce: $y = \frac{1}{15}(-13x - x')$

$y' = \frac{1}{15}(-13x' - x'')$

2. rce: $\frac{1}{15}(-13x' - x'') = 12x + \frac{14}{15}(-13x - x') + \cos t - te^{-t}$

$-13x' - x'' = 12 \cdot 15x - 14 \cdot 13x - 14x' - 15(\cos t - te^{-t})$

$x'' - x' - 2x = 15\cos t - 15te^{-t}$

$\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$; F.S. $\{e^{2t}, e^{-t}\}$.

part. řešení: (i) $x_{p1} = A\cos t + B\sin t$

$x_{p1}' = -A\sin t + B\cos t$

$x_{p1}'' = -A\cos t - B\sin t$

$\hookrightarrow$ $-B - 3A = 15$

$A - 3B = 0$

$\boxed{A = -\frac{9}{2} \quad B = -\frac{3}{2}}$

(ii) $x_{p2} = (At^2 + Bt)e^{-t}$

$x_{p2}' = (-At^2 + (2A - B)t + B)e^{-t}$

$x_{p2}'' = (At^2 + (B - 4A)t + (2A - 2B))e^{-t}$

$-6A = -15$

$-3B + 2A = 0$

$A = \frac{5}{2}$; $B = \frac{5}{3}$

③ $f(x,y) = \dfrac{1-\sqrt{1+x^2+y^2}}{ax^2+y^2}$; $a>0$
$(x,y)\neq(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{(ax^2+y^2)^2}\cdot\left[-\frac{2x}{2\sqrt{}}(ax^2+y^2)-(1-\sqrt{})\cdot 2ax\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{1}{(a+1)^2}\cdot\left[\frac{-1}{\sqrt{4}}(a+1)-\underbrace{(1-\sqrt{4})}_{-1}2a\right]$$

$$= \frac{3a-1}{2(a+1)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{(ax^2+y^2)^2}\left[\frac{-4y}{2\sqrt{}}(ax^2+y^2)-(1-\sqrt{})\cdot(2y)\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{1}{(a+1)^2}\left[\frac{-4}{2\cdot 2}(a+1)-(-1)2\right]$$

$$= \frac{-a+1}{(a+1)^2}.$$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ spojité v bodě $(1,1)$

- složení spojitých
- jmenovatel, argument $\sqrt{}$ jsou >0.

$\exists$ $df(1,1)$ a je to zobrazení $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(u,v) \longmapsto \frac{3a-1}{2(a+1)^2}u + \frac{-a+1}{(a+1)^2}v.$$

$$f(t,0) = \frac{1-\sqrt{1+t^2}}{at^2} = \frac{-t^2}{(1+\sqrt{1+t^2})at^2} \to \frac{-1}{2a}$$

$$f(0,t) = \frac{1-\sqrt{1+2t^2}}{t^2} = \frac{-2t^2}{(1+\sqrt{1+2t^2})t^2} \to -1.$$

nutně: $a = \frac{1}{2}$; $f(0,0) = -1$.

? spojitost: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = -1.$

$$f(x,y) = \frac{1-\sqrt{1+x^2+2y^2}}{\frac{1}{2}x^2+y^2} = \frac{-x^2-2y^2}{(1+\sqrt{1+x^2+2y^2})\frac{1}{2}x^2+y^2}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{1+\sqrt{1+x^2+2y^2}}}_{\to \frac{1}{2}} \cdot (-1) \underbrace{\frac{x^2+2y^2}{(x^2+2y^2)\cdot\frac{1}{2}}}_{\equiv 1 \text{ na } \mathcal{U}(\underset{\sim}{0})} \to \underline{-1}.$$

④ $M = \{(x,y,z);\ xyz = 1\ ;\ x>0, y>0, z>0\}.$

$f(x,y,z) = 1 + xy + yz.$

(a) není omezená!! $\left(n^2, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \in M$

↑ libovolně velké.

je uzavřená!!

$M = \varphi^{-1}(\{1\}) \cap \{x \geq 0\} \cap \{y \geq 0\} \cap \{z \geq 0\}$

$\{1\} = [1,1]$ je uzavřené v $\mathbb{R}$

$\varphi : (x,y,z) \longmapsto xyz$ je spojité.

$\{x \geq 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x \geq 0\}$ je uzavřená...

(b) podezřelé body: (i) $\nabla f, \nabla g$ $\nexists$ $\emptyset$

(ii) $\nabla g = \underset{\sim}{0}$: $\nabla g = (yz, xz, xy) \neq \underset{\sim}{0}$

všude v M

$(x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0)$.

(iii) $\nabla f = \lambda \nabla g$

$$\boxed{\begin{aligned} y &= \lambda yz \\ x+z &= \lambda xz \\ y &= \lambda xy \end{aligned}}$$

$y \neq 0$:

$y \neq 0$: 1. rce $\longrightarrow$ $1 = \lambda z$, 3. rce $1 = \lambda x$ $\Big\} \Rightarrow x = z$

$\nexists$ extrémy

2. rce $\longrightarrow$ $2x = \lambda x z \rightarrow 2 = \lambda z$ spor:

(c) : shora neomezená:

$$(x,y,z) = \left(\frac{1}{n^2}, n, n\right)$$

$$f = 1 + \frac{n}{n^2} + n^2 > n^2$$

zdola omezené: $f > 1$.

Pozn.: $\inf_{\Omega} f = 1$; volme $\left(n, \frac{1}{n^2}, n\right)$

$$f = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \to 1$$

$$n \to +\infty.$$

Komentář k řešení.

(1a) monotonie se redukuje na funkci $f(x) = \ln x/(1+x^3)$, derivace záporná pro x dost velká

(2) z první rovnice vyjádřím x, derivací mám x', dosadím do druhé rce

– součet dvou speciálních pravých stran (raději než VK)

(3a) mimo počátek lze derivovat jako podíl a složenou funkci (jmenovatel nenulový, pod odmocninou kladné číslo)

(3b) totální diferenciál je lineární zobrazení, splňující ...

– existuje dle Věty 14.2.(2), spojitost parc. derivací mimo počátek

(3c) limita po osách $(x, y) = (t, 0)$, $t \to 0$ ... vede na snadnou limitu s odmocninami (rozšíříme, v nejhorším případě l'Hospital)

(3d) spojitost: musíme zajistit, aby $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0)$, tedy definujeme $f(0, 0) = -1$

(4b) podezřelé body – buď $\nabla g = 0$, což je pouze v bodě $(0, 0, 0) \notin M$, nebo $\nabla f = \lambda \nabla g$, kterážto rovnice nemá řešení $\Longrightarrow$ neexistují (ani lokální) extrémy

(4c) shora neomezená, zdola omezená 1, k níž se libovolně může přiblížit, ale nenabývá jí