Používáte-li nějakou složitější větu (l'Hospitalovo pravidlo, věta o limitě složené funkce), není třeba formulovat znění, stručně však ověřte její předpoklady.

Definitivní výsledek a důležité mezivýsledky u každého příkladu zvýrazněte!

Odevzdávejte prosím všechny použité výpočty!

---

1. [**9b**] Je dána řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left((-k)^k\right)\left(\cos\frac{1}{1+k^a}-1\right)$$

V závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$ vyšetřete, zda řada konverguje a zda absolutně konverguje.

---

2. [**7b**] Nalezněte obecné řešení rovnice

$$y''' - 3y'' = 13\cos 2x + 9x^2 - 9x + 6$$

---

3. [**8b**] Uvažujte funkci

$$f(x,y) = \frac{\sqrt[3]{xy}}{\sqrt[5]{x^2+y^2+2x^5}}$$

(i) Určete $\delta > 0$ takové, že f je definována na příslušném okolí bodu $(0,0)$
(ii) Vypočítejte $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$; budiž dále f v počátku dodefinována touto limitou
(iii) Vypočítejte parciální derivace v počátku
(iv) Rozhodněte, zda v počátku existuje totální diferenciál. Jak přesně vypadá?

---

4. [**8b**] Ověřte na základě věty o implicitní funkci, že dvojice podmínek $F_1 = 0$ a $F_2 = 1$, kde

$$F_1 = x\left(\frac{1}{y} - \exp(z)\right) + \sin u\pi$$

$$F_2 = (x+y)^2 + \cos\frac{\pi}{2}(z+u)$$

určuje na jistém okolí bodu $(x,y,z,u) = (0,1,0,1)$ dvojici funkcí $Z = Z(x,y), U = U(x,y)$.
(ii) Vypočítejte $\frac{\partial Z}{\partial x}$, $\frac{\partial Z}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ v bodě $(x,y) = (0,1)$
(iii) Vypočítejte $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ v bodě $(x,y) = (0,1)$

4. termín 19.6.2012

1.příklad 9b

divergence	a<=0	1
abs.konv.	a>1/2	4
konv.	a>0	4

2.příklad 7b

F.S.	1
part.řeš.	3
part.řeš.	3

z čehož vždy: správný tvar p.ř. 1
konstanty 2
(-1/2 za num. chybu)

3.příklad 8b

delta	1
limita	2
parc.d.	1
tot.dif.	4

z čehož -- kandidát 1.5
neex. limity 2.5

4.příklad 8b

předpoklady VIF 3
z čehož regularita matice 2

derivace řádu 1 3
-""- řádu 2 2

(-1/2 za numerické chyby)

(1) $\sum a_k$; $a_k = (-1)^k \cdot \operatorname{arctg}(k^k) \cdot \left(\cos\left(\frac{1}{1+k^a}\right) - 1\right)$.

(i) $|a_k| = \operatorname{arctg}(k^k) \cdot \left(1 - \cos \frac{1}{k^a}\right)$

$k^k \to +\infty$; $\operatorname{arctg}(k^k) \to \frac{\pi}{2}$

$$k^a \to \begin{cases} 0; & a<0 \\ 1 & a=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow |a_k| \to \begin{cases} \frac{\pi}{2}(1-\cos 1) \\ \frac{\pi}{2}\left(1-\cos\frac{1}{2}\right) \end{cases} \neq 0$$

$\boxed{\text{Řada diverguje pro } a \leq 0.}$

(ii) $a>0$: tvrdíme $|a_k| \sim \frac{1}{k^{2a}}$

ověření $\boxed{\sim}$:

$$\frac{|a_k|}{k^{-2a}} = \operatorname{arctg}(k^k) \cdot \frac{1-\cos\frac{1}{1+k^a}}{\left(\frac{1}{1+k^a}\right)^2} \cdot \frac{k^{2a}}{(1+k^a)^2}$$

1. část $\to \frac{\pi}{2}$

2. část $\to \frac{1}{2}$; $\frac{1-\cos y}{y^2} \to \frac{1}{2}$, $y \to 0$

$$\frac{1}{1+k^a} \to \frac{1}{1+\infty} = 0;$$

$$\neq 0 \ \forall k$$

3. část $= \frac{1}{(k^{-a}+1)^2} \to 1$

Řada konv. abs. $\Leftrightarrow 2a>1$, tj. $a>\frac{1}{2}$.

(iii) zbývá vyřešit $a \in (0, \frac{1}{2}]$.

využijme: $\sum (-1)^k b_k$; $b_k = \left(\cos \frac{1}{1+k^a} - 1\right)$

$b_k \to 0$; monotonní: $\frac{1}{1+k^a}$ klesá; $\in (0,1)$

$\cos y$ .. klesá na $(0, \pi) \supset (0,1)$.

$\Rightarrow$ konverguje (Leibniz)

$\operatorname{arctg}(k^k)$ .. omezené $\in (0, \frac{\pi}{2})$

monotonní (roste)

$\Rightarrow \sum a_k$ konv. pro $\forall a > 0$

$a \in (0, \frac{1}{2}]$ .. neabsolutně.

② $y''' - 3y'' = f_1 + f_2$

$\lambda^3 - 3\lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 3)$; F.S. $\{1, x, e^{3x}\}$.

$y_{p1} = A\cos 2x + B\sin 2x$ $\qquad f_1 = 13\cos 2x$

$y'_{p1} = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$

$y''_{p1} = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$

$y'''_{p2} = 8A\sin 2x - 8B\cos 2x$

$(-8B - 3(-4A))\cos 2x + (8A - 3(-4B))\sin 2x$

$= 13 \cdot \cos 2x$

$-8B + 12A = 13 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{3}{4}$

$12B + 8A = 0 \quad , \quad B = -\frac{1}{2}$

$y_{p1} = +\frac{3}{4}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x$

$f_2 = 9x^2 - 9x + 6$

$y_{p2} = x^2(Ax^2 + Bx + C) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$

$y_{p2}' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx$

$y_{p2}'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C$

$y_{p2}''' = 24Ax + 6B$

$24Ax + 6B - 3(12Ax^2 + 6Bx + 2C) = 9x^2 - 9x + 6$

$x^2: \quad -36A = 9 \quad \ldots \quad A = -\frac{1}{4}$

$x: \quad 24A - 18B = -9 \Rightarrow B = \frac{24A+9}{18} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$

$1: \quad 6B - 6C = 6 \qquad C = \frac{6B-6}{6} = -\frac{5}{6}.$

$y_{p2} = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{6}x^2$

---

obecné řešení:

$y = \alpha + \beta x + \gamma e^{3x} + y_{p1} + y_{p2}; \quad x \in R.$

(3) $f = \dfrac{\sqrt[3]{xy}}{\sqrt[5]{x^2+y^2+2x^5}}$;

(i) $x = r\cdot\cos\varphi$; $y = r\cdot\sin\varphi$; menovateľ : $r^2+2r^5\cos^5\varphi$

$= r^2\left(1+2r^3\cos^5\varphi\right)$

$\delta = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow |2r^3\cos^5\varphi| < 1$.

(ii) $x = r_n\cos\varphi_n$ $\quad r_n \to 0 ; > 0$

$y = r_n\sin\varphi_n$ $\quad \{\varphi_n\}\subset \mathbb{R}$ ľubovoľné

$$f = \frac{\sqrt[3]{r_n^2\cdot\cos\varphi_n\cdot\sin\varphi_n}}{\sqrt[5]{r_n^2+2r_n^5\cos^5\varphi_n}} = r_n^{\frac{2}{3}-\frac{2}{5}}\cdot\frac{\sqrt[3]{\cos\varphi_n\cdot\sin\varphi_n}}{\sqrt[5]{1+\underbrace{2r_n^3\cos^5\varphi_n}_{\to 0}}}$$

$r_n^{\frac{2}{3}-\frac{2}{5}} = r_n^{\frac{4}{15}} \to 0$

$\cos\varphi_n\sin\varphi_n$ -- omezené $\quad \Rightarrow f \to 0$

$\sqrt[5]{} \to 1$ $\quad$ definuji $f(0,0)=0$

(iii) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0}\varphi(t)$,

kde $\varphi(t) = \frac{1}{t}\left[f(t,0)-f(0,0)\right] = \frac{0}{t}\ \forall t\neq 0$

$\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$

podobně $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

(iv) kandidát $L: (u,v) \longmapsto 0$

ověření: $\lim\limits_{(u,v)\to(0,0)} \dfrac{f(u,v)-f(0,0)-L(u,v)}{\sqrt{u^2+v^2}} = 0$

$u = r_n \cdot \cos \varphi_n$

$v = r_n \sin \varphi_n$ … podobně, leč

$r_n^{-\frac{11}{15}} \to +\infty$

nebo volbe $u = v = t$; $t \to 0+$

$$\frac{\sqrt[3]{t^2}}{\sqrt[5]{t^2+t^2+2t^5}} \cdot \frac{1}{\sqrt[2]{2t^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{t^{2/3}}{t \cdot \sqrt[5]{2t^2+2t^5}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2} \cdot t^{1/3} \cdot \sqrt[5]{2t^2+2t^5}} \to \frac{1}{0+} = +\infty.$$

(4) $F_1 = x\left(\frac{1}{y} - e^{z}\right) + \sin(\pi u) = 0$

$F_2 = (x+y)^2 + \cos\left(\frac{\pi}{2}(u+z)\right) = 1$

$A = (x, y, z, u) = (0, 1, 0, 1)$

VIF – předpoklady:

$F_1(A) = 0 \cdot (\quad) + \sin\pi = 0$

$F_2(A) = 1^2 + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$F_1, F_2 \in C^{k}$ $(y \neq 0)$

klíčový předpoklad: $\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(z, u)}(A)$ regulární

$$= \begin{pmatrix} -x e^{z}, & \pi\cos(\pi u) \\ -\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}(u+z), & -\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}(u+z) \end{pmatrix}\Bigg|_A = \begin{pmatrix} 0, & -\pi \\ -\frac{\pi}{2}, & -\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\exists$ fce $Z = Z(x, y)$ $\quad \mathcal{U}((0,1);\delta) \to \mathcal{U}((0,1), \Delta)$

$U = U(x, y)$

$Z(0,1) = 0$

C^{k} pro $\forall k \in \mathbb{N}$ $\quad U(0,1) = 1$

řeší $\frac{x}{y} - x e^{Z} + \sin\pi U = 0$

$(x+y)^2 + \cos\frac{\pi}{2}(U + Z) = 1$ $\quad \forall (x,y) \in \mathcal{U}((0,1);\delta)$

(ii) $\frac{\partial}{\partial x}$: $\frac{1}{y} - e^{Z} - x e^{Z} \cdot \frac{\partial Z}{\partial x} + \pi \cos \pi U \cdot \frac{\partial U}{\partial x} = 0$

$$2(x+y) - \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} (U+Z) \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial x} \right) = 0$$

dosadíme : $(x,y) = (0,1)$

$(Z,U) = (0,1)$

$$-\pi \frac{\partial U}{\partial x}(0,1) = 0$$

$$2 - \frac{\pi}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial x} \right)(0,1) = 0$$

$\Rightarrow$ $U_x(0,1) = 0$

$Z_x(0,1) = \frac{4}{\pi}$

$\frac{\partial}{\partial y}$: $x\left(\frac{-1}{y^2} - e^{Z} \cdot Z_y \right) + \pi \cos \pi U \cdot U_y = 0$

$$2(x+y) - \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} (U+Z) \cdot (U_y + Z_y) = 0$$

dosadíme :

$$-\pi U_y(0,1) = 0$$

$$2 - \frac{\pi}{2} \cdot (U_y + Z_y)(0,1) = 0$$

$\Rightarrow$ $U_y(0,1) = 0$

$Z_y(0,1) = \frac{4}{\pi}$.

(iii) $\frac{1}{y} - e^{z} - x \cdot e^{z} \cdot z_x + \pi \cos \pi u \cdot u_x = 0$

$\frac{\partial}{\partial y}$: $-\frac{1}{y^2} - e^{z} \cdot z_y - x(\cdots) - \pi^2 \sin \pi u \cdot u_x^2$

$+ \pi \cos \pi u \cdot u_{xy} = 0$

dosadíme:

$$-1 - \frac{4}{\pi} - 0 \cdot (\quad) - 0 \cdot (\quad) - \pi u_{xy}(0,1) = 0$$

$$u_{xy}(0,1) = -\frac{1}{\pi}\left(1 + \frac{4}{\pi}\right).$$