4. TERMÍN – 23.6.2009

Používáte-li nějakou složitější větu (l'Hospitalovo pravidlo, věta o limitě složené funkce), není třeba formulovat znění, stručně však ověřte její předpoklady.

Definitivní výsledek a důležité mezivýsledky u každého příkladu zvýrazněte!

Veškeré úvahy řádně odůvodněte. Odevzdávejte prosím všechny použité výpočty.

---

1. [**8b**] Je dána řada

$$\sum_{k=2}^{\infty}(i)^k \ln\left(1+\frac{\sqrt[3k]{k}}{\ln^3 k}\right).$$

(a) rozhodněte, zda řada konverguje
(b) rozhodněte, zda řada absolutně konverguje

---

2. [**8b**] Je dána diferenciální rovnice

$$x^2y' = y(x-y).$$

(a) nalezněte obecný tvar řešení (včetně definičních oborů!)
(b) diskutujte, zda (a kde) lze daná řešení napojovat
(c) případně zdůvodněte, kde napojování (větvení) možné není

---

3. [**8b**] Je dána funkce

$$f(x,y) = \frac{y\sqrt[3]{x^4}}{x^2+y^2} + \frac{x}{1+y}.$$

(a) vypočítejte $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$
(b) dodefinujte funkci spojitě v bodě $(0,0)$; pro takto dodefinovanou funkci dále:
(c) vypočítejte $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$
(d) rozhodněte, zda existuje $df(0,0)$, neboli totální diferenciál v bodě $(0,0)$

---

4. [**8b**] Dokažte, že trojice rovnic

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y + \sin z &= 3t \\ \exp(x+z) - \ln(t+e) &= 0 \\ x^3 + x + tx + t &= 0 \end{aligned}$$

určuje v okolí bodu $(x,y,z,t) = (0,0,0,0)$ nekonečně hladké funkce $X = X(t)$, $Y = Y(t)$ a $Z = Z(t)$.
(b) spočítejte $X'(0)$, $Y'(0)$, $Z'(0)$
(c) spočítejte $X''(0)$

① $\sum_{k=2}^{\infty} (i)^k \ln\left(1+\frac{\sqrt[3k]{k}}{\ln^3 k}\right)$

(a) $(i)^k = 1, i, -1, -i, \dots$ omezené částečné součty...

$\sum_{k=0}^{N} i^k = 0, 1, 1+i, i, 0, \dots$

? $b_k \to 0$; $\{b_k\}$ monotónní ($k \geq k_0$)

$b_k = \ln(1+c_k)$; $c_k = \frac{\sqrt[3k]{k}}{\ln^3 k}$

stačí pro $\{c_k\}$; neboť $\ln(1+x)$; $x > -1$ je monotónní, spojitý $= 0$ pro $x = 0$.

$c_k = \underbrace{\frac{1}{\ln^3 k}}_{\substack{\text{klesá} \to 0 \\ > 0}} \cdot \underbrace{\sqrt[3k]{k}}_{d_k}$; $d_k = f(k)$ $\qquad d_k \to \exp(0) = 1.$

$f(x) = \exp\left(\frac{1}{3x}\ln x\right)$

stačí monotonie fce $h(x) = \frac{1}{3x}\ln x$;

$h'(x) = \frac{1}{(3x)^2} \cdot \left[\frac{1}{x} \cdot 3x - 3 \cdot \ln x\right]$

$= \frac{3}{(3x)^2}\left[1 - \ln x\right] < 0$ pro $x > e$

$d_k > 0$; klesá pro $k \geq 3$.

(b) jde o řadu $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \left|\quad\right| = \sum_{k=2}^{\infty} \underbrace{\ln(1+c_k)}_{>0}$.

řádová rovnost: $\ln(1+c_k) \;\&\; c_k$

$$\frac{\ln(1+c_k)}{c_k} \longrightarrow 1\,; \quad k \to 0$$

$c_k \to 0$; $c_k \neq 0$ & základní limita $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

---

zjevně: $c_k \sim \dfrac{1}{\ln^3 k}$; (neboť de $\to 1$).

? $\displaystyle\sum \frac{1}{\ln^3 k}$ ... tvrdíme: <u>diverguje:</u>

$$\frac{1}{\ln^3 k} = \frac{1}{k}\cdot \underbrace{\frac{k}{\ln^3 k}}_{\to +\infty} \geq \frac{1}{k}\,; \quad k \geq k_0$$

$\sum \frac{1}{k}$ div.

<u>Pozn.:</u> Raabe: $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} k\left(\left(\frac{\ln(k+1)}{\ln k}\right)^3 - 1\right) = 0$

$$= \frac{\left(\frac{\ln(k+1)}{\ln k}\right)^3 - 1}{\frac{1}{k}}$$

(2x l'Hospital)

② $x^2 y' = y(x-y)$

homogenní rce: $\left(y' = \frac{yx - y^2}{x^2} \right)$

$$\left| \begin{array}{l} y(x) = x z(x) \\ y' = x z' + z \end{array} \right.$$

$$x^2 (x z' + z) = x z (x - x z) = x^2 z (1 - z)$$

$(x \neq 0)$.

$$x z' + z = z - z^2$$

$\boxed{x z' = -z^2}$ $\longrightarrow$ $z \equiv 0$

$y \equiv 0;\ x \in \mathbb{R}$ řešení.

(a) $z > 0$: $\quad \frac{-z'}{z^2} = \frac{1}{x}$

$x \neq 0$:

$$\frac{1}{z} = \ln|x| + c = \ln d|x|; \quad d = e^c > 0.$$

$\ln d|x| > 0$

$d|x| > 1$

$|x| > \frac{1}{d}$ ... $x \in \left(\frac{1}{d}, +\infty\right)$

$\left(-\infty, -\frac{1}{d}\right)$.

$$z = \frac{1}{\ln d|x|}$$

$y = x z = \frac{x}{\ln|d|x}$ ... maximální řešení!!

v bodě $\pm\frac{e}{d}$ $\lim = \pm\infty$.

(b) $R<0$: $\frac{1}{R} = \ln|t| + c = \ln d|t| < 1$

$$d|t| < 1$$

$$R = \frac{1}{\ln d|t|} \qquad 0 \neq |t| < \frac{1}{d}$$

$$x \in \left(-\frac{1}{d}, 0\right)$$

$$y = \frac{t}{\ln d|t|}. \qquad \left(0, \frac{1}{d}\right).$$

---

napojení: v bodě $\pm\frac{1}{d}$ $\lim = \pm\infty$.

v počátku: $\lim_{x\to 0\pm} y(t) = \lim_{x\to 0\pm} \frac{0}{-\infty} = 0$.

$\rightarrow$ lze napojit nulové řešení
nebo řešení s jinou konstantou...

Pozn.: $x \neq 0$: rce je ekvivalentní

$$y' = f(t,y)$$

$$f(t,y) = \frac{ty - y^2}{t^2} \in C^1$$

$\Rightarrow$ nelze napojovat, větvit atd..

③ $f(x,y) = \dfrac{\sqrt[3]{x^4}\,y}{x^2+y^2} + \dfrac{x}{1+y}$;

(a) (pozn.:) $\sqrt[3]{x^4} = \sqrt[3]{x^3}\,\sqrt[3]{x} = x\sqrt[3]{x}$.

polární souřadnice: $x = r_n \cos\varphi_n$; $r_n \to 0$

& Heineho v. $y = r_n \sin\varphi_n$ $\{\varphi_n\}$ lib.

$$f = \frac{\cancel{r_n^2} \cos\varphi_n \sin\varphi_n \sqrt[3]{r_n\cos\varphi_n}}{\cancel{r_n^2\cos^2\varphi_n + r_n^2\sin^2\varphi_n}} + \frac{r_n\cos\varphi_n}{1+r_n\sin\varphi_n}$$

$$= \underbrace{\sqrt[3]{r_n}}_{\downarrow 0} \cdot \underbrace{\cos\varphi_n \sin\varphi_n \sqrt[3]{r_n\cos\varphi_n}}_{\text{omezené}} + \frac{r_n\cos\varphi_n \to 0}{1+\underbrace{r_n\sin\varphi_n}_{\downarrow}} \to 0.$$

(b) $f(0,0) := 0$.

(c) $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[f(t,0) - f(0,0)\right]$$

$$\ldots \frac{1}{t}\cdot\left[\frac{\sqrt[3]{t^4}\cdot 0}{\underbrace{t^2+0^2}_{=0}} + \frac{t}{1+0} - 0\right] = 1 \to \boxed{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\underbrace{\left[f(0,t) - f(0,0)\right]}_{=0} = \boxed{0.}$$

(d) kandidát: $L: (u,v) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,u + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,v = \underline{u}$.

$\underline{\text{ověření}}$: $\lim\limits_{(u,v)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\left[f(u,v) - f(0,0) - L(u,v)\right] = 0.$

tvrdíme: $\lim \neq 0 \Rightarrow \nexists\, df(0,0)$.

vol $(u,v) = (t,t)$; $t \to 0+$ $(t>0)$

(limitou ve směru osy Q-drantu...)

$$\frac{1}{\sqrt{2t^2}}\left[\frac{t^{7/3}}{2t^2} + \frac{t}{1+t} - t\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot t^{-2/3} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{t - t(1+t)}{(1+t)t}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot t^{-2/3}}_{\to +\infty} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{-t}{1+t}}_{\to 0} \to +\infty.$$

④ $F_1 = \sin x + \sin y + \sin z - 3t$

$F_2 = \exp(x+z) - \ln(t+e)$

$F_3 = x^3 + x + tx + t$

$F_1(0,0,0,0) = 0+0+0-3\cdot 0 = 0$

$F_2(0,0,0,0) = e^0 - \ln(e) = 0$

$F_3(0,0,0) = 0$

C^∞ na okolí $(0,0,0,0)$ — složení C^∞ fcí

$e^{-x}+y^2 \neq 0$ blízko $(x,y)=(0,0)$.

$t+e > 0$ blízko $(t=0)$.

---

klíčový předpoklad: $\left.\dfrac{\partial(F_1,F_2,F_3)}{\partial(x,y,z)}\right|_{(0,0,0,0)}$ regulární

$\nabla F_1 = (\cos x, \cos y, \cos z) \ldots (1,1,1)$.

$\nabla F_2 = (\exp(x+z), 0, \exp(x+z))$

$\ldots(\ ,\ ,\ )$

$\nabla F_3 = (3x^2+1+t, 0, 0)$ ...

dosazení: $\begin{pmatrix} 1,1,1 \\ 1,0,1 \\ 1,0,0 \end{pmatrix}$ ... regulární.....

---

1. derivace: $\sin X(t) + \sin Y(t) + \sin Z(t) - 3t = 0$

$$\exp(X(t)+Z(t)) - \ln(t+e) = 0$$

$$X^3(t) + X(t)(1+t) + t = 0$$

$$\frac{d}{dt} \rightsquigarrow \quad X'(t)\cos X(t) + Y'(t)\cos Y(t) + Z'(t)\cos Z(t) - 3 = 0$$

$$\left(X'(t) + Z'(t)\right)\exp\left(X(t)+Z(t)\right) - \frac{1}{t+e} = 0$$

$$3X'(t)X^2(t) + X'(t)(1+t) + X(t) + 1 = 0$$

---

dosazení: $t=0: \ X(0)=Y(0)=Z(0)=0.$

$$X'(0)+Y'(0)+Z'(0) = 3$$

$$X'(0)+Z'(0) = \frac{1}{e}$$

$$X'(0)+1 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} X'(0) &= -1 \\ Z'(0) &= \frac{1}{e}+1 \\ Y'(0) &= 3-\frac{1}{e} \end{aligned}}$$

2. derivace: (stačí 3-rce):

$$x'(3x^2+1+t)+x \equiv 0 \quad \Big| \frac{d}{dt}$$

$$x''(3x^2+1+t)+x'(3x^2+1+t)+x'=0$$

t=0:

$$x''(0)+2x'(0)=0$$

$$\boxed{x''(0)=2}.$$