5. TERMÍN – 30.6.2009

Používáte-li nějakou složitější větu (l'Hospitalovo pravidlo, věta o limitě složené funkce), není třeba formulovat znění, stručně však ověřte její předpoklady.

Definitivní výsledek a důležité mezivýsledky u každého příkladu zvýrazněte!

Veškeré úvahy řádně odůvodněte. Odevzdávejte prosím všechny použité výpočty.

---

1. [6b] Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{k!}{(3+1^a)(3+2^a)\dots(3+k^a)}}$$

pro všechny hodnoty parametru $a > 0$.

---

2. [8b] Nalezněte obecné řešení rovnice

$$x^2 y'' + x y' + 4y = \sin(\ln x) \cdot \cos(\ln x)$$

pro neznámou funkci $y = y(x)$ v intervalu $x \in (0, \infty)$.

---

3. [8b] Je dána funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{yx}{\sqrt[3]{x^3+y^2+2x^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) ověřte, že f je spojitá v bodě $(0,0)$
(b) vypočítejte směrovou derivaci $\frac{\partial f}{\partial v}(\sqrt{3}, 0)$, kde $v = (0, -1)$
(c) vysvětlete podrobně, co značí $df(0,0)$ (totální diferenciál v bodě $(0,0)$) a zda existuje !

---

4. [10b] Je dána funkce

$$f = x + 2y^2$$

na množině $M := \left\{x^2 + y^2 \leq 1\right\} \cap \{x \geq y\}$

(a) dokažte existenci globálního minima a maxima
(b) vyšetřete podezřelé body uvnitř M
(c) vyšetřete podezřelé body na hranici M
(d) identifikujte globální extrémy !

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\dfrac{k!}{(3+1^a)\cdots(3+k^a)}}$; $a>0$.

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \sqrt{\frac{k+1}{3+(k+1)^a}} = \frac{1}{\sqrt{\underbrace{\frac{3}{k+1}}_{\to 0} + \underbrace{(k+1)^{a-1}}_{b_k}}} \to q$$

(i) $a>1$: $b_k \to +\infty$ .. $q=0$ KONV.

$a<1$: $b_k \to 0$ .. $q=+\infty$ DIV.

(jmenovatel $\to 0$
$>0\ \forall k$)

(ii) $a=1$
$q=1$ ... obecně nevíme; Raabe

$$k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) = k\left(\sqrt{\frac{k+4}{k+1}} - 1\right)$$

$$= k \, \frac{\frac{k+4}{k+1} - 1}{\sqrt{} + 1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{} + 1} \cdot \frac{k}{k+1} \cdot 3 \to \frac{3}{2} > 1 \quad \text{KONV.}$$

VK: $x = c_1(t)\cos 2t + c_2(t)\sin 2t$

systém $\quad c_1'\cos 2t + c_2'\sin 2t = 0$

$$-2c_1'\sin 2t + 2c_2'\cos 2t = \sin t\cos t.$$

$$c_1' = -\sin 2t\sin t\cos t \cdot \frac{1}{2}$$

$$c_2' = \cos 2t\sin t\cos t \cdot \frac{1}{2}$$

---

integrace: $-\frac{1}{2}\sin^2 2t = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-\cos 4t\right)\dots$

$$\cos 2t\cdot\sin t\cos t = \left(\cos^2 t - \sin^2 t\right)\sin t\cos t$$

$$= \left(1-2\sin^2 t\right)\sin t\,\underbrace{\cos t}_{dy}$$

y.

etc..

(2) $x^2y'' + xy' + 4y = \sin(\ln x)\cdot\cos(\ln x).$

$y(t) = R(\ln x)$

$y'(t) = R'(\ln x)\cdot\frac{1}{x}$

$y''(t) = R''(\ln x)\cdot\frac{1}{x} - R'(\ln x)\cdot\frac{1}{x^2}$

$R'' + 4R = \sin t\cos t$

$\lambda^2 + 4 = 0 \qquad F.S.\ \{\cos 2t, \sin 2t\}$

P.S.: $\frac{1}{2}\sin 2t \rightarrow$ spec. PS $\qquad$ 0.5

---

ansatz: $R_p = (At\cos 2t + Bt\sin 2t)$

$R_p' = (2Bt + A)\cos 2t + (-2At + B)\sin 2t$

$R_p'' = (-4At + 4B)\cos 2t + (-4Bt - 4A)\cos 2t$

---

dosazení: $4B\cos 2t - 4A\sin 2t = \frac{1}{2}\sin 2t$

$B = 0$

$A = -\frac{1}{8}$

$R_{obecné} = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t - \frac{t}{8}\cos 2t$

③ $f = \dfrac{xy}{\sqrt[3]{x^3+2x^2+y^2}}$

(a) spoj.: $f(x,y) \to 0$

polární souř.: $x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$

$$f = \frac{r^2\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt[3]{r^3\cos^3\varphi + 2r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}}$$

omezené:

$$= \underbrace{\frac{r^2}{r^{2/3}}}_{\to 0} \cdot \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt[3]{\underbrace{r\cos^3\varphi}_{\geq -\frac{1}{2}} + \underbrace{\cos^2\varphi + 1}_{\geq 1}}}$$

$|\text{čitatel}| \leq 1$

$|\text{jmenovatel}| \geq \sqrt[3]{1-\frac{1}{2}}$

pro r malé.

(b) $\frac{1}{t}\left[f(\sqrt{3}, -t) - \underbrace{f(\sqrt{3}, 0)}_{=0}\right]$

$$= \frac{1}{\cancel{t}} \cdot \frac{-\sqrt{3}\cdot\cancel{t}}{\sqrt[3]{3^{3/2}+2\cdot 3+t^2}} \to \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3^{3/2}+6}}.$$

(c) kandidát: $L:(u,v)\longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot u+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)v$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\Big[\underbrace{f(x,0)-f(0,0)}_{\equiv 0}\Big]=0$$

podobně $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

---

ověření: $\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\cdot\Big[f(u,v)-f(0,0)-L(u,v)\Big]$

$$=\frac{uv}{\sqrt{u^2+v^2}\cdot\sqrt[3]{u^3+2u^2+v^2}}\qquad\Bigg|\quad \begin{aligned}u&=r\cos\varphi\\ v&=r\sin\varphi\end{aligned}$$

$$=\underbrace{\frac{r^2}{r\cdot r^{2/3}}}_{=r^{1/3}\to 0}\cdot\underbrace{\frac{\cos\varphi\cdot\sin\varphi}{\sqrt[3]{1+\cos^2\varphi-r\sin^3\varphi}}}_{\text{omezené pro } r \text{ malé}}$$

$=r^{1/3}\to 0$

omezené pro r malé — viz výše...

---

(4) $f = x + 2y^2$

$M = \{x^2+y^2 \leq 1\} \cap \{x \geq y\}$

(a)

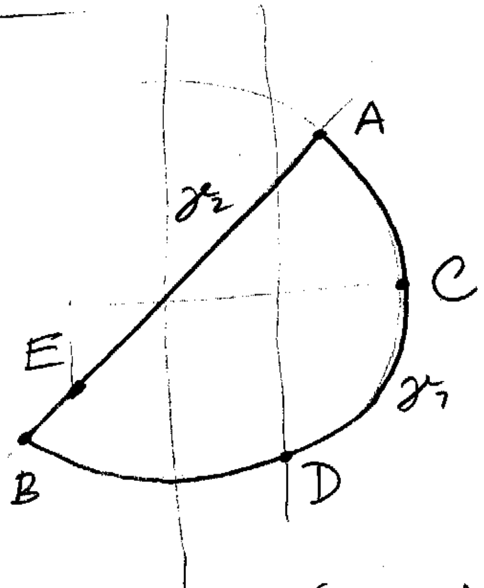
omezené: $|x|, |y| \leq 1$ 0.5

uzavřené: $F_1 \cap F_2 \dots$ etc. 1.5

(b) vnitřek $\nabla f = (1, 4y) \neq \underset{\sim}{0}$

$\nexists$ extrémy

(c)



rohy $A = [\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$

$B = [-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$ 1.5

(i) γ_1: $\nabla g_1 = (2x, 2y) \neq \underset{\sim}{0}$ na γ_1 0.5

$\nabla f = \lambda \nabla g$: $1 = 2\lambda x$

$\boxed{4y = 2\lambda y}$

2.rce: $y(4-2\lambda) = 0$ (α) $y = 0$: $\rightarrow x = 1$

$C = [1, 0]$

(β) $y \neq 0$: $\lambda = 2$; $x = \frac{1}{4}$

$y = \frac{-\sqrt{15}}{4}$

$D = [\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{15}}{16}] \dots$ 1.

(iii) γ_2: $\nabla g_2 = (1,-1) \neq 0$ všude

$1 = \lambda \cdot 1 \quad \Rightarrow \lambda = 1$

$4y = -\lambda \qquad y = -\frac{1}{4} \qquad E = \left[-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right].$

(d) $A = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \qquad f = 1.7$

$B = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \qquad f = 0.3$

$C = [1, 0] \qquad f = 1$

$D = \left[\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{15}}{4}\right] \qquad f = 2.1 \qquad \boxed{\text{max}}$

$E = \left[-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right] \qquad f = -0.125 \qquad \boxed{\text{min}}$