1. ZP – 25.3.
VARIANTA A

Používáte-li nějakou složitější větu (l'Hospitalovo pravidlo, věta o limitě složené funkce), není třeba formulovat znění, stručně však ověřte její předpoklady.

Definitivní výsledek a důležité mezivýsledky u každého příkladu zvýrazněte!

A1. [**3b**] Rozhodněte, zda konverguje řada

$$\sum_k \exp(-\sqrt{k}).$$

A2. [**4b**] Určete, zda konverguje řada

$$\sum_k (-1)^k \frac{\ln k}{k^2+1}.$$

Rozhodněte také, zda konverguje absolutně.

A3. [**5b**] Dokažte, že řada

$$\sum_k (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \operatorname{tg} \frac{1}{k} \cdot \operatorname{arctg} k^2$$

konverguje (lhostejno, zda absolutně nebo ne).

1. ZP – 25.3.
VARIANTA B

Používáte-li nějakou složitější větu (l'Hospitalovo pravidlo, věta o limitě složené funkce), není třeba formulovat znění, stručně však ověřte její předpoklady.

Definitivní výsledek a důležité mezivýsledky u každého příkladu zvýrazněte!

B1. [**3b**] Rozhodněte, zda konverguje řada

$$\sum_k \frac{\ln 2 \cdot \ln 3 \ldots \ln(k+1)}{\ln 2 \cdot \ln 5 \ldots \ln(k^2+1)}.$$

B2. [**4b**] Určete, zda konverguje řada

$$\sum_k (-1)^k \frac{\sqrt{k}+1}{\sqrt{k^3}+1}.$$

Rozhodněte také, zda konverguje absolutně.

B3. [**5b**] Dokažte, že řada

$$\sum_k \sqrt[k]{k} \frac{\cos k}{\exp k - \ln k}$$

konverguje (lhostejno, zda absolutně nebo ne).

A1 $\sum e^{-\sqrt{k}}$; $\quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = e^{\left(\sqrt{k}-\sqrt{k+1}\right)} = e^{\left(-b_k\right)}$;

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \to \frac{1}{\infty} = 0.$$

$\frac{a_{k+1}}{a_k} \to 1$? Raabe :

$$k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) = \underbrace{\frac{\left(e^{b_k} - 1\right)}{b_k}} \cdot k \cdot b_k$$

$\to 1$, neboť $\frac{e^{y}-1}{y} \to 1$; $y \to$

$b_k \to 0$; $b_k \neq 0 \ \forall k$.

$$k \cdot b_k = \frac{k}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{1+\frac{1}{k}}+1} \to \frac{\infty}{1+1} = \infty.$$

$\infty > 1$: Konverguje.

B1 $\sum \frac{\ln 2 \cdot \ldots \cdot \ln(k+1)}{\ln 2 \cdot \ldots \cdot \ln(k^2+1)}$ podílové kritérium

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\ln\left((k+1)+1\right)}{\ln\left((k+1)^2+1\right)} = \frac{\ln(k+2)}{\ln(k^2+2k+2)}.$$

$$\text{l'Hosp.}\ \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{\frac{1}{k+2}}{\frac{2k+2}{k^2+2k+2}} = \frac{k^2+2k+2}{(k+2)(2k+2)} = \frac{1+\frac{2}{k}+\frac{2}{k^2}}{\left(1+\frac{2}{k}\right)\left(2+\frac{2}{k}\right)}$$

$\to \frac{1}{1\cdot 2} < 1$: Konverguje.

A2 $\sum (-1)^k \underbrace{\frac{\ln k}{k^2+1}}$.

Leibniz? $b_k \to 0$ (k^2 silnější než $\ln k$)

monotónie?? $b_k = f(k)$; $f(x) = \frac{\ln x}{x^2+1}$.

$f'(x) = \left(\frac{1}{x^2+1}\right)^2 \cdot \left\{\frac{1}{x}(x^2+1) - \ln x \cdot 2x\right\}$

$= \frac{1}{(x^2+1)^2} \cdot x \left\{\left(1+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}\right) - \underbrace{2\ln x}_{\to +\infty}\right\} < 0$ pro x velké.

$\{b_k\}$ klesá pro k velké. konverguje.

? abs. konv.: $|a_k| = \frac{\ln k}{k^2+1} \le \frac{\ln k}{k^2} = \frac{\ln k}{k^{1/2}} \cdot \frac{1}{k^{3/2}}$.

$\frac{\ln k}{k^{1/2}} \to 0$; tedy ≤ 1 pro k velké

$\sum \frac{1}{k^{3/2}}$ konverguje $\rightsquigarrow$ $\sum |a_k|$ konv.

$\sum a_k$ konv. abs.

B2 $\sum (-1)^k \underbrace{\frac{1+k^{1/2}}{1+k^{3/2}}}$.

Leibniz: $b_k = \frac{k^{-\frac12}+1}{k^{-1/2}+k} \to \frac{0+1}{0+\infty} = 0$.

? monotónie: $b_k = \underbrace{(1+k^{-1/2})}_{\text{klesá}} \cdot \frac{1}{k+k^{-1/2}}$?!

$f(x) = x + x^{-1/2}$; $f'(x) = 1 - \frac{1}{2}x^{-3/2} < 0$ pro $x > 1$.

$k + k^{-1/2}$ roste $\Rightarrow$ b_k klesá (součin klesajících kladných posloupností)

? abs. konv.:

$|a_k| = \boxed{b_k \sim \frac{1}{k}}$; $\sum \frac{1}{k}$ div $\Rightarrow \sum |a_k|$ div.

$\sum a_k$ konv. neabs.

$\frac{b_k}{\frac{1}{k}} = k\, b_k = \frac{k^{\frac12}+k}{k^{-\frac12}+k} = \frac{k^{-1/2}+1}{k^{-\frac32}+1} \to 1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

(A3) $$\sum_k \underbrace{(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \operatorname{tg}\frac{1}{k}}_{a_k} \cdot \underbrace{\operatorname{arctg} k^2}_{b_k}$$

$\{b_k\}$ omezené $\left(\leq \frac{\pi}{2}\right)$
rostoucí (arctg y roste v $\mathbb{R}$).

Abel. krit. $\Rightarrow$ stačí ukázat, že $\sum a_k$ konv.:

$\sum (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}$:

k	1	2	3	4	5	6	7
$(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}$	1	-1	-1	1	1	-1	-1

$\Rightarrow$ omezené částečné součty !!

$\operatorname{tg}\frac{1}{k} \to 0$; monotónně

$\frac{1}{k} \to 0$; $\operatorname{tg} 0 = 0$

$\left\{\frac{1}{k}\right\}$ klesá; $\frac{1}{k} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\operatorname{tg} x$ rostoucí v $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow \left\{\operatorname{tg}\frac{1}{k}\right\}$ klesá.

Dirichlet. krit. $\Rightarrow \sum a_k$ konv.

? absolutní konvergence: $\sum \left| (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \operatorname{tg}\frac{1}{k} \cdot \operatorname{arctg} k^2 \right|$

$$= \sum \operatorname{tg}\frac{1}{k} \cdot \underbrace{\operatorname{arctg} k^2}_{\geq \operatorname{arctg} 1 > 0 \ldots}.$$

$\operatorname{tg}\frac{1}{k} \sim \frac{1}{k}$; $\sum \frac{1}{k}$ div. $\Rightarrow$ konv. neabsolutně.

ověření: $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} \to 1$; neboť $\dfrac{\operatorname{tg} x}{x} \to 1$; $x \to 0$

$\frac{1}{k} \to 0$; $\frac{1}{k} \neq 0 \ \forall k$.

(B3) $\sum \sqrt[k]{k} \cdot \cos k \cdot \frac{1}{e^k - \ln k}$;

uvažme nejprve (jednodušší) řadu $\sum \cos k \cdot \frac{1}{e^k - \ln k}$ (P)

$\sum \cos k$ .. omezené částečné součty

$\frac{1}{e^k - \ln k} \to 0$; monotónně.

ověření: $e^k - \ln k = \underbrace{e^k}_{\to \infty}\Big(1 - \underbrace{\frac{\ln k}{e^k}}_{\to 0}\Big) \to \infty \cdot 1 = \infty$ exp silnější než ln.

monotonie: $f(x) = e^x - \ln x$; $f'(x) = e^x - \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x > 1$

$\{e^k - \ln k\}$ roste; $\Rightarrow \left\{\frac{1}{e^k - \ln k}\right\}$ klesá.

Dirichlet: řada (P) konverguje.
$\{\sqrt[k]{k}\}$ je omezená, monotónní
$\Rightarrow$ původní řada konverguje.

ověření: $\sqrt[k]{k} = \exp\Big(\underbrace{\tfrac{1}{k} \ln k}_{\to 0}\Big) \to \exp(0)$ (k silnější než ln k)

$\{\sqrt[k]{k}\}$ má limitu $\in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ je omezená

monotonie:

$f(x) = \frac{1}{x} \ln x$; $f'(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x} \cdot x - \ln x\right) < 0$

$\ln x > 1$
$x > e$

$\{\frac{1}{k} \ln k\}$ klesá pro $k \geq 3$.